



# Méthodologies d'aide à la décision en conception robuste

Emmanuel Pillet

## ► To cite this version:

Emmanuel Pillet. Méthodologies d'aide à la décision en conception robuste. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Franche-Comté, 2008. Français. NNT : . tel-00585707

**HAL Id: tel-00585707**

**<https://theses.hal.science/tel-00585707>**

Submitted on 13 Apr 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

**présentée à**

L'U.E.R. DES SCIENCES ET TECHNIQUES  
DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCHE-COMTÉ

**pour obtenir le**

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ  
DE FRANCHE-COMTÉ  
Spécialité : Sciences pour l'Ingénieur**

## **MÉTHODOLOGIES D'AIDE À LA DÉCISION EN CONCEPTION ROBUSTE**

**par**

**Emmanuel PILLET**

**Soutenue le 28 mars 2008 devant la commission d'Examen :**

<b>Président du jury</b>	J. PIRANDA	Professeur, Université de Franche-Comté
<b>Rapporteurs</b>	A. EL HAMI	Professeur, INSA de Rouen
	D. A. RADE	Professeur, Université fédérale d'Uberlândia (Brésil)
<b>Examineurs</b>	L. BILLET	Ingénieur R&D, EDF Clamart
	F. BUFFE	Ingénieur R&D, CNES Toulouse
<b>Directeur de thèse</b>	N. BOUHADDI	Professeur, Université de Franche-Comté
<b>Codirecteur de thèse</b>	S. COGAN	Chargé de recherche CNRS, Institut FEMTO-ST



# Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Monsieur le Professeur Dominique PERREUX, directeur à mon arrivée au Laboratoire de Mécanique Appliquée Raymond CHALÉAT, de m'avoir accueilli au sein de cette unité.

Je remercie très sincèrement Messieurs les Professeurs Abdelkhalak EL HAMI et Domingos Alves RADE de m'avoir fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux et d'en être les rapporteurs.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean PIRANDA pour avoir accepté d'être le président du jury de cette thèse et à Messieurs Laurent BILLET et Fabrice BUFFE pour leurs participations à ce jury.

Merci à Monsieur le Professeur Nouredine BOUHADDI et Monsieur Scott COGAN pour m'avoir fait confiance et avoir codirigé mes travaux de recherche. Merci pour leurs conseils et encore plus pour la patience dont ils ont fait preuve face à mes nombreux atermoiements.

Une thèse semblerait bien plus longue s'il n'y avait pas dans son bureau des personnes avec qui échanger. Pour leur accompagnement et leur sympathie, je remercie par ordre d'apparition Nicolas BOURLIAUD, Fouad KHATYR, Sébastien ROUZIER, Kirill VOLYANSKIY, Christophe AVRIL (désolé de t'avoir fumé lors des entraînements d'athlé), Nivas Babu SELVARAJ, sans oublier les petits nouveaux, Mouloud AÏSSANI, Marko FELDIĆ, Hua MA et Abdel Hakim BEN OUIRANE. Mention spéciale à Ludovic FARINES et Franck GASQUEZ qui ont réalisé toutes leurs thèses à mes côtés. Je finirai en ayant une pensée pour Sylvain BOURGAINE qui nous a malheureusement quitté bien trop tôt.

Pardon de ne pas tous pouvoir les nommer, mais je remercie chaleureusement tous les membres du LMARC, doctorants, enseignants, employés, techniciens, étudiants, avec qui j'ai pu converser et qui ont su rendre agréable mon séjour dans ce laboratoire.

Mais la recherche c'est aussi des rencontres enrichissantes avec des gens de tous pays, je dis donc *merci barcha* à mes collègues tunisiens de l'IPEI de Nabeul et *muito obrigado* aux collègues brésiliens que j'ai eu l'occasion de rencontrer.

Pour finir, je remercie mes parents, mes grands-parents pour leurs soutiens de toujours.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des notations et abréviations</b>	<b>xiii</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Méthodes approchées en analyse modale</b>	<b>7</b>
1.1 Modèle linéaire d'un système dynamique . . . . .	8
1.2 Méthodes de condensation et de synthèse modale . . . . .	10
1.2.1 Bases de représentation du mouvement . . . . .	11
1.2.2 Classification des méthodes de sous-structuration . . . . .	14
1.2.3 Couplage des sous-structures . . . . .	15
1.2.4 Méthodes de sous-structuration . . . . .	16
1.3 Réanalyse approchée . . . . .	18
1.3.1 Réanalyse approchée paramétrique . . . . .	20
1.4 Méthodes d'approximation par métamodèles . . . . .	24
1.4.1 Surfaces de réponse . . . . .	24
1.4.2 Le krigeage . . . . .	26
1.4.3 Les réseaux de neurones . . . . .	27
1.4.4 Choix d'une méthode d'approximation . . . . .	33
1.5 Paramétrisation de modèle . . . . .	39
1.5.1 Analyse de sensibilité en présence d'incertitudes . . . . .	39
1.5.2 Localisation d'erreurs . . . . .	47
<b>2 Aide à la décision en synthèse modale</b>	<b>51</b>
2.1 Utilisation des modes propres orthogonaux en synthèse modale . . . . .	52
2.1.1 Décomposition en modes propres orthogonaux . . . . .	52
2.1.2 Adaptation à la sous-structuration . . . . .	56
2.1.3 Applications . . . . .	62
2.1.4 Conclusion . . . . .	76

2.2	Qualification des super-éléments . . . . .	77
2.2.1	Filtrage . . . . .	77
2.2.2	Localisation . . . . .	80
2.2.3	Correction . . . . .	81
2.2.4	Application au moteur d'avion . . . . .	82
2.2.5	Conclusion . . . . .	87
2.3	Choix optimal des degrés de liberté maîtres . . . . .	88
2.3.1	Méthode d'optimisation proposée . . . . .	89
2.3.2	Application . . . . .	91
2.3.3	Conclusion . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Aide à la décision pour l'identification et la planification d'essais</b>	<b>95</b>
3.1	Introduction . . . . .	96
3.2	Identification paramétrique avec données incertaines . . . . .	97
3.2.1	Théorie générale des problèmes inverses . . . . .	97
3.2.2	Analyse de Monte Carlo . . . . .	101
3.2.3	Remarques sur la convergence . . . . .	102
3.2.4	Utilisation des métamodèles . . . . .	104
3.2.5	Application . . . . .	104
3.3	Planification d'essais pour le gain d'informations . . . . .	113
3.3.1	Plan d'expérience bayésien . . . . .	113
3.3.2	Traitement numérique . . . . .	115
3.3.3	Applications . . . . .	117
3.4	Conclusion . . . . .	126
<b>4</b>	<b>Aide à la décision par approche <i>info-gap</i></b>	<b>127</b>
4.1	La théorie <i>info-gap</i> . . . . .	128
4.1.1	Présentation . . . . .	128
4.1.2	Le modèle <i>info-gap</i> . . . . .	128
4.1.3	Les fonctions robustesse et opportunité . . . . .	129
4.1.4	Calcul de courbes de robustesse et d'opportunité . . . . .	129
4.2	Évaluation de la robustesse des méthodes de recalage . . . . .	132
4.2.1	Applications . . . . .	133
4.3	De la robustesse des modèles optimaux . . . . .	135
4.3.1	Illustration . . . . .	136
4.4	Conclusions . . . . .	139
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>141</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>145</b>
	<b>Listes des publications</b>	<b>159</b>
	<b>Annexes</b>	<b>161</b>
A	Critères de comparaison des modèles . . . . .	161
B	Apprentissage neural et régularisation bayésienne . . . . .	162
B.1	Notations . . . . .	162

B.2	L'algorithme de Levenberg-Marquardt . . . . .	163
B.3	La régularisation bayésienne . . . . .	164
B.4	Algorithme d'apprentissage neural par régularisation bayésienne . . . .	166
B.5	Calculs des dérivées partielles . . . . .	167
C	Échantillonnage de Monte Carlo . . . . .	169
D	Méthodologies de recalage . . . . .	169
D.1	Recalage par sensibilité . . . . .	170
D.2	Recalage basé sur l'erreur en relation de comportement . . . . .	171
<b>Résumé</b>		<b>176</b>





# Liste des figures

1	Différents types de variations de la fonction performance : (a) réponses en dehors de la cible avec une faible variation ; (b) réponses dans la cible avec une forte variation ; (c) réponses en dehors de la cible avec une forte variation ; (d) réponses dans la cible avec une faible variation . . . . .	4
1.1	Représentation d'un neurone . . . . .	27
1.2	Architecture d'un PMC à deux couches cachées et un neurone de sortie linéaire	29
1.3	Illustration du phénomène de surajustement : (a) réseau généralisant bien, (b) réseau généralisant mal . . . . .	31
1.4	Illustration de la validation croisée . . . . .	32
1.5	Comparaison de la performance de différentes méthodes d'approximation sur une fonction non-régulière . . . . .	34
1.6	Modèle du rotor . . . . .	35
1.7	Observation de la régularité pour la troisième vitesse critique . . . . .	36
1.8	Critères : $R^2$ (a), ERAM (b), MERA (c) . . . . .	38
1.9	Domaines et temps de création des différents métamodèles . . . . .	38
1.10	Trajectoires associées à la méthode de Morris . . . . .	41
1.11	Analyse de sensibilité de la méthode de Morris . . . . .	42
1.12	Indices de sensibilité du premier ordre ( $\bigcirc$ ) et totaux ( $\Delta$ ) . . . . .	46
1.13	Indices de sensibilité du second ordre pour les paramètres $x_1$ à $x_6$ . . . . .	47
2.1	Assemblage de trois sous-structures . . . . .	60
2.2	Plaque raidie par un profilé en U . . . . .	62
2.3	Erreurs relatives sur les fréquences propres de la plaque raidie pour différentes méthodes de synthèse modale . . . . .	64
2.4	Erreurs relatives sur les vecteurs propres de la plaque raidie pour différentes méthodes de synthèse modale . . . . .	65
2.5	Évolution des erreurs relatives sur les fréquences et vecteurs propres de la plaque raidie en fonction du nombre de réponses . . . . .	65
2.6	Erreurs relatives sur les fréquences propres de la plaque raidie sur [0 ; 1400 Hz]	66
2.7	Erreurs relatives sur les fréquences propres de la plaque raidie pour CB, MA, KLCB et KLMA . . . . .	67
2.8	Erreurs relatives sur les fréquences et vecteurs propres de la plaque raidie pour MA, MAG, KL . . . . .	67

2.9	Matrice de MAC entre les modes du modèle initial de la plaque raidie et ceux du modèle perturbé . . . . .	68
2.10	Erreurs relatives sur les fréquences propres de la plaque raidie avec les bases initiales et robustes . . . . .	69
2.11	Erreurs relatives sur les vecteurs propres de la plaque raidie avec les bases initiales et robustes . . . . .	69
2.12	Erreurs relatives sur les vecteurs propres de la plaque raidie pour CBE, MAE, KLE, KLCBE et KLMAE . . . . .	70
2.13	Moteur d'avion étudié . . . . .	71
2.14	Sous-structures : (a) SS1 , (b) SS2, (c) SS3, (d) SS4 , (e) SS5, (f) SS6,(g) SS7 , (h) SS8	71
2.15	Erreurs relatives sur les fréquences propres du moteur pour différentes méthodes de synthèse modale . . . . .	73
2.16	Erreurs relatives sur les vecteurs propres du moteur pour différentes méthodes de synthèse modale . . . . .	73
2.17	(a) Comparaison des FRFs; (b) zoom sur les FRFs; (c) comparaison des différences par rapport à la référence . . . . .	74
2.18	Matrice de MAC entre les modes du modèle initial du rotor et ceux du modèle perturbé . . . . .	75
2.19	(a) Comparaison des FRFs du système perturbé; (b) et(c) Zooms sur les FRFs .	76
2.20	Résultats du filtrage pour SS1 : (a) $I_v^{part}$ , (b) $I_v^{eff}$ . . . . .	83
2.21	Résultats du filtrage pour SS2 : (a) $I_v^{part}$ , (b) $I_v^{eff}$ . . . . .	83
2.22	Résultats du filtrage pour SS3 : (a) $I_v^{part}$ , (b) $I_v^{eff}$ . . . . .	83
2.23	Résultats du filtrage pour SS5 : (a) $I_v^{part}$ , (b) $I_v^{eff}$ . . . . .	84
2.24	(a) Matrice de MAC entre les modes de la référence et ceux obtenus avec CB avant filtrage, (b) Matrice de MAC entre les modes du modèle condensé avant et après filtrage . . . . .	84
2.25	Localisation des erreurs du modèle condensé après filtrage . . . . .	85
2.26	Déformées des résidus de SS1 . . . . .	85
2.27	Localisation d'erreur après correction . . . . .	86
2.28	Matrice de MAC après optimisation . . . . .	86
2.29	Localisation d'erreur après filtrage trop sévère . . . . .	87
2.30	Comparaison des modes 87, 88 et 89 de SS5 avec les résidus . . . . .	87
2.31	Équerre divisée en trois sous-structures . . . . .	90
2.32	Évolution des solutions obtenues avec la décomposition QR . . . . .	91
2.33	Évolutions des solutions de l'AG pour : (a) SS1 , (b) SS2, (c) SS3 . . . . .	92
3.1	Problème inverse et prise de décision . . . . .	97
3.2	La conjonction de l'information issue de la théorie $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ (a) et de l'information <i>a priori</i> $\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ (b) permet d'obtenir l'information <i>a posteriori</i> $\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ (c) .	99
3.3	Modèle du moteur d'avion . . . . .	105
3.4	(a) Moyennes sur les indices de Morris; (b) évolution de $\mu_k^{M^*}$ après classement des paramètres . . . . .	106
3.5	Éléments finis associés aux paramètres d'intérêt . . . . .	106
3.6	Critères : $R^2$ (a), ERAM (b), MERA (c) . . . . .	107
3.7	Évolutions de $\hat{\mu}_{n_s}^t$ pour (a) $x_1$ et (b) $x_{25}$ ; évolutions de $\hat{S}_{n_s}^t$ pour (c) $x_1$ et (d) $x_{25}$ .	108

3.8	Résultats de l'identification pour les paramètres (a) $x_7$ , (b) $x_{39}$ , (c) $x_6$ , (d) $x_{20}$ , (e) $x_3$ , (f) $x_1$ , (g) $x_{27}$ , (h) $x_5$ , (i) $x_{25}$ . . . . .	110
3.9	Diagramme de dispersion <i>a posteriori</i> entre (a) $x_5$ et $x_6$ , entre (b) $x_{20}$ et $x_{25}$ , entre (c) $x_3$ à $x_{27}$ . . . . .	111
3.10	Densité de probabilité <i>a posteriori</i> sur les observations pour (a) $d_1$ à $d_6$ , (b) $d_7$ à $d_9$ , (c) $d_{10}$ à $d_{13}$ et (d) $d_{14}$ à $d_{22}$ . . . . .	112
3.11	(a) $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta_1) = 0,78$ et $U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta_1) = 0,24$ , (b) $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta_2) = 0,78$ et $U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta_2) = 0,37$ . . . . .	115
3.12	Système étudié . . . . .	117
3.13	Les huit configurations du système . . . . .	118
3.14	$\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$ en fonction de $\eta_i$ pour (a) $A_1$ , (c) $A_2$ et (e) $A_3$ ; $\hat{U}_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta)$ en fonction de $\eta_i$ pour (b) $A_1$ , (d) $A_2$ et (f) $A_3$ . . . . .	120
3.15	$\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta)$ en fonction de $\eta_i$ . . . . .	121
3.16	Évolution des fonctions d'utilité pour la deuxième configuration : (a) $\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$ , (b) $\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta)$ . . . . .	121
3.17	(a) FBH; (b) FBH-PS; (c) points de mesures de FBH; (d) points de mesures de FBH-PS . . . . .	122
3.18	Éléments finis associé aux paramètres utilisés pour recalcr FBH . . . . .	123
4.1	Pour la méthode borne, AG et BFGS : (a) fonction robustesse; (b) fonction opportunité . . . . .	131
4.2	(a) Évolution de $R(\mathbf{q})$ pour $\mathbf{q} \in [(1 - \alpha)\mathbf{q}; (1 + \alpha)\mathbf{q}]$ ; (b) projection sur $(k_r, R(\mathbf{q}))$ . . . . .	132
4.3	(a) : MEF de plaque; (b) : MEF et points de mesure . . . . .	133
4.4	Fonction robustesse : (a) recalage par sensibilité, (b) recalage par CRE . . . . .	134
4.5	(a) : MEF de la structure HRG; (b) : MEF et points de mesure . . . . .	134
4.6	Fonctions robustesse en fonction du type de recalage : (a) PELAS1, (b) PELAS2 . . . . .	135
4.8	$\hat{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{c})$ en fonction de $r_c$ pour deux conceptions de passerelle . . . . .	137
4.9	(a) Courbes de robustesse en vue 2-D pour différentes valeurs de $p$ ; (b) zoom sur la vue 2-D . . . . .	138
4.10	Courbes de robustesse en vue 3-D pour différentes valeurs de $p$ . . . . .	139
4.11	$\hat{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{c})$ en fonction de $p$ pour $r_c = 9,1$ . . . . .	139



# Liste des tableaux

1.1	Valeurs nominales des paramètres de conception . . . . .	36
2.1	Composition des bases de condensation de la plaque raidie (ddls) . . . . .	64
2.2	Erreurs relatives moyennes de la plaque raidie . . . . .	64
2.3	Erreurs relatives moyennes de la plaque raidie en fonction du nombre de modes retenus . . . . .	66
2.4	Composition des bases de condensation enrichies de la plaque raidie (ddls) . .	69
2.5	Composition des bases de condensation du rotor (ddls) . . . . .	72
2.6	Erreurs relatives moyennes du rotor . . . . .	72
2.7	Composition des bases de condensation enrichies du rotor (ddls) . . . . .	75
2.8	Relations entre la localisation d'erreur de modélisation et la localisation d'er- reur de condensation . . . . .	81
2.9	Comparaison de la première fréquence propre obtenue pour 15 ddls maîtres internes . . . . .	91
2.10	$f_c^i$ avant et après optimisation par l'AG . . . . .	92
2.11	Comparaison de la précision de « Guyan QR » et de « Guyan AG » . . . . .	93
3.1	Erreurs d'estimation pour la configuration $\eta_1$ . . . . .	119
3.2	Erreurs du krigage sur la base de test . . . . .	124
3.3	Gain d'information pour les observations simulées . . . . .	124
3.4	Gain d'information pour les observations expérimentales . . . . .	125
3.5	Erreurs sur les fréquences pour différents ensembles de paramètres . . . . .	125



# Liste des notations et abréviations

## Abréviations

AG	Algorithme génétique
ANOVA	<i>ANalyse Of VAriances</i>
BED	<i>Bayesian Experimental Design</i>
CA	<i>Combined Approximations</i>
CB	<i>Craig-Bampton</i>
COMAC	<i>Coordinate Modal Assurance Criterion</i>
Cusum	<i>Cumulative sums</i>
ddl(s)	Degré(s) de liberté
DKL	Décomposition de Karhunen-Loève
DVS	Décomposition en Valeurs Singulières
ERDC	Erreur en Relation De Comportement
G	Guyan
FRF(s)	Fonction(s) de Réponse Fréquentielle
i.i.d	indépendant(e)s identiquement distribué(e)s
KL	Karhunen-Loève ou Kullback-Leibler (suivant le contexte)
KLD	Kullback-Leibler Distance
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i>
MA	MArtinez <i>et al.</i>
MCMC	<i>Markov Chain Monte Carlo</i>
MDRE	<i>Minimum Dynamic Residuals Expansion</i>
MECE	<i>Minimization of Errors in Constitutive Equations</i>
MEF(s)	Modèle(s) Éléments Finis
MKL	Martinez-Karhunen-Loève
NSGA	<i>Non Sorting Genetic Algorithm</i>
PCA	Principal Component Analysis
PMC	Perceptron Multi-Couches
POD	<i>Proper Orthogonal Decomposition</i>
POM	<i>Proper Orthogonal Mode</i>
OAT	<i>One factor At Time</i>
SCA	Système Conservatif Associé
SCI	<i>Single Composite Input</i>



ss | Sous-structure

## Notations générales

$\mathbf{A}^T$	Transposée complexe conjuguée de $\mathbf{A}$
$(\cdot)^{-1}$	Inverse d'une matrice carrée
$(\cdot)^\dagger$	Pseudoinverse d'une matrice
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne d'un vecteur ou d'une matrice
$\text{diag}(\cdot)$	Diagonale d'une matrice
$\text{tr}(\cdot)$	Trace d'une matrice
$\langle \cdot \rangle$	Opérateur moyen
$(\cdot, \cdot)$	Produit scalaire défini sur l'espace $\Omega : (f, g) = \int_{\Omega} f^T g \, d\Omega$
$N$	Nombre de ddls total du modèle
$c$	Nombre de ddls mesurés
$i$	Nombre des ddls de jonction
$j$	Nombre des ddls internes
$m$	Nombre des ddls maîtres
$s$	Nombre des ddls esclaves
$q$	Ddls généralisés
$\mathbf{I}_{nn}$	Matrice identité d'ordre $n$
$\mathbf{K}$	Matrice de raideur
$\mathbf{M}$	Matrice de masse
$\Delta\mathbf{K}, \Delta\mathbf{M}$	Matrices de correction en raideur et en masse
$\mathbf{Z}_v$	Matrice de raideur dynamique du mode $v$ : $\mathbf{Z}_v = (\mathbf{K} - \lambda_v \mathbf{M})$
$\Delta\mathbf{Z}_v$	Matrice de correction en raideur dynamique du mode $v$
$\Phi$	Matrice modale
$\Lambda$	Matrice spectrale
$\mathbf{R}$	Matrice de vecteurs résiduels
$\mathbf{M}_{rr}$	Matrice de corps rigide
$\mathbf{L}$	Matrice de localisation des ddls observés
$\mathbf{y}$	Vecteur de déplacements
$\mathbf{f}$	Vecteur de forces
$\mathbf{q}$	Vecteur des coordonnées généralisées
$\lambda_v, \Phi_v$	Valeur et vecteur propre du mode $v$
$\omega_v$	Pulsation propre du mode $v$ ( $\text{rad.s}^{-1}$ ), $\lambda_v = \omega_v^2$
$f_v$	Fréquence propre du mode $v$ (Hz), $\lambda_v = (2\pi f_v)^2$
$c\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$	Vecteur propre sur les $c$ ddls observés
$\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$	Vecteur propre du mode $v$ issu d'une procédure d'expansion
$\mathbf{r}_v$	Résidu en déplacement relatif au mode $v$
$\gamma$	coefficient de confiance dans les mesures
$\mathbf{T}^{ss}$	Matrice de transformation d'une sous-structure $ss$

$\mathbf{K}^c$	Matrice de raideur condensée par sous-structuration
$\mathbf{M}^c$	Matrice de masse condensée par sous-structuration
$(\bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eff}})^v$	Matrice de masse modale effective relative au mode $v$ de ddls de jonction $j$
$\Delta \mathbf{f}_v$	Résidu en force relatif au mode $v$
$e_v^{(ss)}$	Résidu en énergie relatif au mode $v$ et à la sous-structure $ss$
$I_v^{\text{part}}$	Indicateur de participation modal relatif au mode $v$
$I_v^{\text{eff}}$	Indicateur relatif au mode $v$ et associé aux masses modales effectives
$I_v^{\text{enr}}$	Indicateur de localisation en énergie relatif au mode $v$
$I_v^{\text{proj}}$	Indicateur de localisation par projection relatif au mode $v$
$E(x)$	Espérance mathématique de la variable aléatoire $x$
$\bar{x}$	Moyenne arithmétique de la variable aléatoire $x$
$\mathbf{C}$	Matrice de covariance de la variable aléatoire $x$
$\sigma(x)$	Écart-type de la variable aléatoire $x$
$V(x)$	Variance de la variable aléatoire $x$
$N(\mu, \sigma^2)$	Loi normale d'espérance $\mu$ et variance $\sigma^2$
$E$	Module d'Young ( $\text{N.m}^{-1}$ )
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\rho$	Masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
$\mathbf{m}$	Ensemble des paramètres du modèle
$\mathbf{d}$	Ensemble des données observables
$\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$	Fonction de densité de probabilité <i>a priori</i> sur $\mathbf{m}$
$\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$	Fonction de densité de probabilité associée aux données expérimentales
$\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$	Fonction de densité de probabilité représentant les incertitudes théoriques
$L(\mathbf{m})$	Fonction de vraisemblance
$\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$	Fonction de densité de probabilité <i>a posteriori</i> sur $\mathbf{m}$
$\sigma_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$	Fonction de densité de probabilité <i>a posteriori</i> sur $\mathbf{d}$
$\eta$	Protocole expérimental
$\mathbf{p}$	Vecteur des paramètres de conception
$\mathbf{c}$	Vecteur des paramètres incertains
$\mathbf{q}$	Vecteur des paramètres de conception et incertains
$\alpha$	Horizon d'incertitude
$U(\alpha, \mathbf{c}_0)$	Modèle info-gap enveloppe
$\hat{\alpha}(\mathbf{p}, r_c)$	Fonction robustesse
$\hat{\beta}(\mathbf{p}, r_c)$	Fonction opportunité
$R(\mathbf{q})$	Mesure de performance
$r_c$	Valeur critique liée à $R(\mathbf{q})$
$r_w$	Valeur souhaitée liée à $R(\mathbf{q})$



# Introduction générale

## Contexte de l'étude

La maîtrise du calcul prévisionnel du comportement dynamique de structures mécaniques demeure un enjeu majeur pour les industriels tant sur le plan de la compréhension de certains phénomènes physiques que sur le plan de l'amélioration de la conception en présence de facteurs mal maîtrisés. Parmi ces facteurs, les nombreuses sources d'incertitudes, la grande taille des modèles éléments finis, les grandes quantités de données, *etc.*, sont des problèmes reconnus comme déterminants dans une phase de conception. De la prise en compte de ces incertitudes lors de la phase de conception, est née la conception robuste. Nous présentons dans les deux paragraphes suivants, quelques concepts associés aux incertitudes et à la conception robuste.

## De l'incertitude et de ses modélisations

Il n'existe pas un seul type d'incertitudes. Bien que suivant les auteurs [100, 132, 154], la classification ou les noms associés aux incertitudes diffèrent, on distinguera deux catégories d'incertitudes :

- les incertitudes réductibles qui résultent d'un manque de connaissances des mécanismes mis en jeu et peuvent donc être diminuées par une augmentation de la quantité d'information. Elles interviennent par exemple lors d'une méconnaissance des relations de comportement des matériaux ou encore des phénomènes intervenant aux raccordement entre sous-structures. Ces incertitudes sont aussi souvent qualifiées d'épistémiques.
- les incertitudes irréductibles qui sont dues à la variabilité intrinsèque du système étudié et de son environnement [154]. Elles sont au mieux caractérisées par un modèle mathématique tel que ceux exposés ci-après mais ne peuvent pas être réduites. Elles résultent par exemple de la variabilité des propriétés matériaux, de la variabilité de la température, de la variabilité dans l'assemblage des composantes, *etc.* Ces incertitudes affectent la structure mécanique elle-même, mais aussi les instruments de mesures. Ces incertitudes sont souvent qualifiées dans la littérature d'incertitudes aléatoires ou stochastiques.

Oberkamp *et al.* [154] font une distinction supplémentaire en séparant les erreurs des incertitudes. Ils définissent une erreur comme une imprécision identifiable qui n'est pas due à un manque de connaissance. Les erreurs peuvent être volontaires, par exemple lors d'une

simplification de maillage destinée à accélérer les calculs, ou involontaires, par exemple lors d'étourderies dans la programmation. Pour peu que l'analyste ou toute autre personne prenne le temps de vérifier son travail, les erreurs involontaires sont théoriquement identifiables. Les erreurs involontaires étant réductibles, on pourra tout de même considérer qu'elles se classent dans la catégorie des incertitudes épistémiques.

Dans tous les cas, il est nécessaire de formaliser mathématiquement ces incertitudes. Diverses modélisations de l'incertitude ont été proposées afin de répondre à une grande variété de problèmes. Sans prétendre être exhaustif, nous citerons notamment :

- l'approche probabiliste ou stochastique utilisant la théorie des probabilités afin de représenter les incertitudes. On retrouve dans cette approche deux points de vue. La vision fréquentiste se veut objective, seule la fréquence d'occurrence d'un événement est utilisée pour calculer la probabilité. La vision bayésienne est plus subjective, la probabilité est calculée à partir d'un état d'information *a priori*. L'approche stochastique est la plus couramment utilisée [180, 181] ;
- l'approche intervalle où les paramètres sont bornés par des intervalles déterministes [48, 145] ou aléatoires [44, 183]. Ce dernier cas s'intègre dans le cadre de la théorie des preuves ou *evidence theory*. Cette théorie utilise une mesure de croyance – la somme des preuves en faveur de l'occurrence d'un événement – et de plausibilité – le complément de la somme des preuves qui vont à l'encontre de l'occurrence de l'événement – afin de définir les bornes d'un événement [165] ;
- la théorie des ensembles flous [132, 210] qui permet de modéliser les incertitudes en utilisant des données subjectives. Une fonction d'appartenance permet d'associer à un nombre flou – le paramètre incertain – borné par un support, un degré d'appartenance compris entre 0 et 1. De la valeur du degré d'appartenance va dépendre le jugement sur l'incertitude du paramètre. À partir de cette théorie, a aussi été développée la théorie des possibilités [51, 211]. Dans un formalisme proche de la théorie des croyances, cette approche utilise une mesure de possibilité pour décrire l'occurrence d'un événement et une mesure de nécessité pour indiquer le degré auquel l'occurrence d'un événement est attendue ;
- l'approche convexe ou *info-gap* [16] dont le principe sera exposé dans le chapitre 4 ;
- la théorie des méconnaissances [106, 165] où à chaque sous-ensemble incertain d'une structure est associée une variable interne contenue dans un intervalle dont les bornes sont stochastiques.

Les approches intervalle, ensembles flous ou encore convexe sont par opposition à l'approche stochastique, des méthodes non-stochastiques. Dans sa théorie généralisée de l'information, Klir [100] a proposé un cadre pour réunir et comparer les approches stochastiques et non-stochastiques.

L'approche classique de modélisation consiste à représenter un système mécanique à l'aide d'un modèle éléments finis (MEF) déterministe. À une entrée correspond une unique réponse déterministe. La modélisation stochastique permet de prendre en compte les incertitudes dans la structure du modèle. À une entrée correspond une réponse aléatoire. Les incertitudes sont introduites dans le modèle :

- soit par une approche paramétrique. On retrouve principalement la méthode des élé-

ments finis stochastiques où l'on distingue l'approche spectrale [61] et l'approche par perturbation [214] ;

- soit par une approche non-paramétrique [4, 33, 190, 191]. Les incertitudes sont introduites directement sur les matrices globales du modèle à travers un paramètre de dispersion.

## La conception robuste

La conception robuste cherche à minimiser l'impact des sources d'incertitude vis-à-vis de la performance du système modélisé. Un des pionniers en la matière fut Taguchi qui dès les années cinquante développa une méthodologie permettant d'appliquer des concepts statistiques afin d'obtenir une conception de qualité. Selon lui [32], plutôt que « d'éliminer ou de réduire les causes de variabilité de la performance d'un produit, il est préférable d'ajuster sa conception afin de la rendre insensible aux causes de variations ». Pour bien formuler un problème de conception robuste il est nécessaire de faire une distinction entre [32] :

- les paramètres de conception du modèle tels que les paramètres matériaux ou les dimensions ;
- les paramètres de conception environnementaux tels que la température, la pression ambiante ou encore l'utilisateur ;
- les fonctions performances du système.

L'approche conception robuste au sens de Taguchi repose sur l'utilisation :

- d'une fonction perte permettant de quantifier la perte de qualité subie par le produit à cause d'une mauvaise conception ;
- du ratio signal/bruit qui mesure l'effet de la variation des paramètres de conception du modèle et environnementaux sur les fonctions performances. Sa définition varie suivant le problème étudié mais il s'agit toujours d'une fonction de la forme

$$RSB = -10 \log_{10}(SB).$$

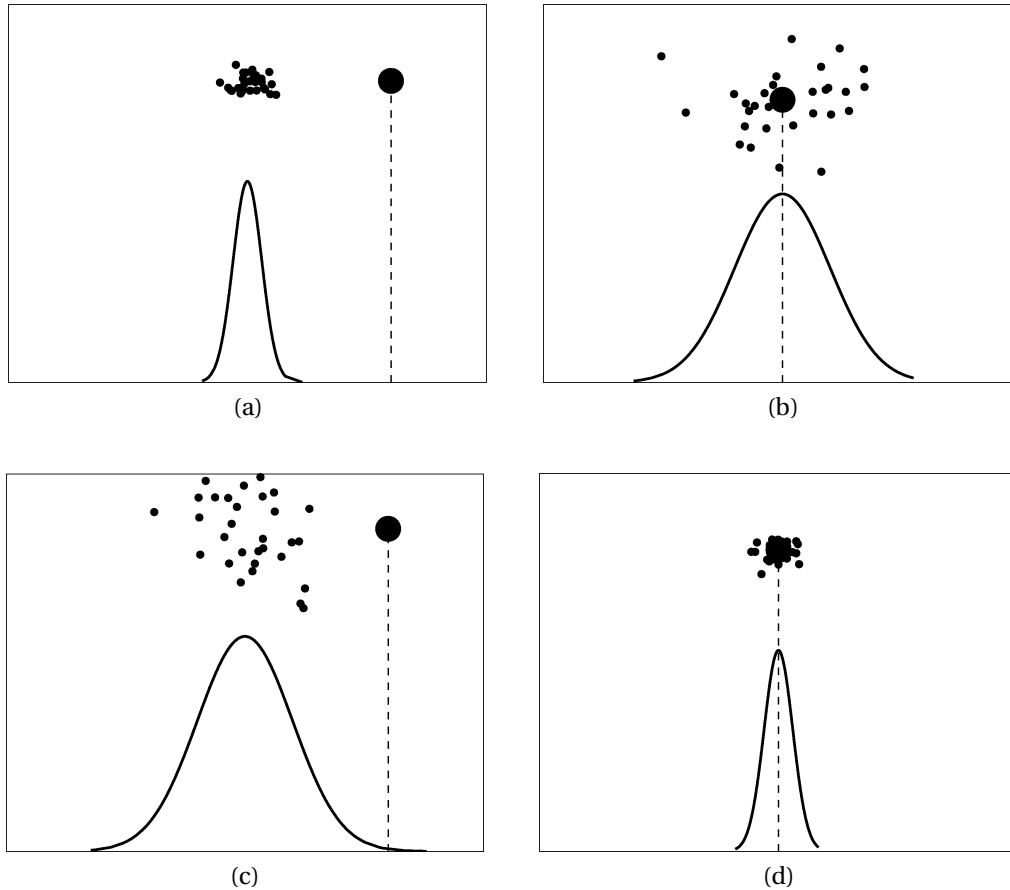
Généralement, on cherche à maximiser ce ratio en prenant  $SB = \sigma^2/\mu^2$ , où  $\sigma$  et  $\mu$  sont respectivement l'écart type et la variance de la fonction performance.

Les effets de la variabilité des paramètres de conception sont étudiés aux moyens de plans d'expériences où les paramètres de conception appelés facteurs prennent un nombre limité de valeurs appelées niveaux. Une fois trouvée la conception permettant de maximiser le ratio signal/bruit, la moyenne de la fonction performance est ajustée sur la réponse voulue en faisant varier les paramètres de conception ayant peu d'influence sur la variance de la performance.

Cette démarche est très largement utilisée dans les entreprises – au point d'être une marque déposée – car très bien documentée, facile à mettre oeuvre et, dans la cas de la simulation numérique, demandant peu de calculs. Cette approche a cependant ses limites. On lui reproche notamment de mal prendre en compte les interactions entre les paramètres à cause de l'emploi de plans d'expériences orthogonaux [159]. L'augmentation de la puissance des ordinateurs a permis le développement de techniques de conception robuste plus coûteuses en temps de calcul mais plus justes du point de vue statistique. Ces techniques reposent principalement sur des techniques d'optimisation déterministes ou stochastiques.

Dans tous les cas, l'objectif de l'optimisation est de minimiser sous contraintes la moyenne et la variance des fonctions performances.

Pour un aperçu des applications des approches de conception robuste en dynamique, on pourra se référer à l'article de Zang *et al.* [212]. Dans ce même article, se trouve une représentation intéressante des différents types de variations d'une fonction performance. Nous nous permettons d'en proposer une adaptation dans les figures ci-dessous. Sur chaque figure, la distribution est associée aux réponses du modèle dont la dispersion est représentée par les petites cercles. Le gros cercle localise la valeur cible de la fonction performance. Le but de la conception robuste est d'aboutir à un système dont les réponses sont celles du cas illustré figure 1d.



**Fig. 1** – Différents types de variations de la fonction performance : (a) réponses en dehors de la cible avec une faible variation ; (b) réponses dans la cible avec une forte variation ; (c) réponses en dehors de la cible avec une forte variation ; (d) réponses dans la cible avec une faible variation

## Problématique et contenu du mémoire

### Problématique

Cette étude s'est initialement inscrite dans le cadre du Projet Supersonique 2003-2006. Nous nous sommes intéressés à la mise en oeuvre de méthodologies facilitant la prise de décision dans un contexte de conception robuste en dynamique des structures. Les incertitudes sur les paramètres de conception, les incertitudes sur les mesures ou encore l'impact

des modifications ont été pris en compte par l'approche probabiliste ou l'approche *info-gap*. Les analyses employées lors de la conception étant diverses et variées, nous nous sommes attaché à développer plusieurs outils touchant au processus de conception robuste. Ces outils concernent

- la synthèse modale ;
- la réanalyse approchée ;
- l'identification paramétrique ;
- la planification d'essais ;
- le recalage.

## **Contenu du mémoire**

En sus de l'introduction, de la conclusion et des annexes, ce mémoire est organisé comme suit.

Le chapitre 1 présente différents outils d'analyse utilisés tout au long de ce travail. Le modèle dynamique utilisé est tout d'abord précisé, puis le problème de l'approximation des réponses dynamiques d'un système mécanique est abordé sous la forme d'une revue de différentes méthodes d'approximation basées sur la réduction modale et sur les métamodèles. Nous étudions aussi le problème de la réanalyse approchée après modifications structurales. Enfin, nous discutons de la paramétrisation de modèle et présentons quelques méthodes de sensibilité et de localisation d'erreurs de modélisations.

Dans le chapitre 2, nous étudions le potentiel d'une méthode de synthèse modale basée sur l'utilisation des modes propres orthogonaux et notamment son application à la condensation robuste. Nous proposons aussi une méthodologie de vérification et d'optimisation de super-éléments. Enfin, nous montrons qu'un algorithme génétique peut permettre une sélection optimale des coordonnées physiques dans les méthodes de réduction type Guyan.

Le chapitre 3 concerne le problème inverse de l'identification paramétrique des structures mécaniques à partir d'observations incertaines ainsi que la quantification de l'information susceptible d'être obtenue grâce à des mesures expérimentales. Nous utilisons dans cette étude une formulation probabiliste des problèmes inverses qui combine, sous forme de distribution de probabilité, les informations *a priori* sur les paramètres, les modèles d'incertitudes sur les mesures réelles ou simulées et les incertitudes sur le modèle. La planification d'essais en vue d'un gain d'information est basée sur l'utilisation des plans d'expériences bayésiens.

Enfin, dans le chapitre 4, l'approche de modélisation non-probabiliste *info-gap*, est utilisée pour deux problèmes. Nous appliquons la méthode *info-gap* afin d'évaluer la robustesse aux incertitudes de deux méthodes de recalage de paramètres incertains non utilisés dans la procédure de recalage. Cette méthode nous permet aussi de vérifier pour un modèle élasto-dynamique que, dans un environnement incertain et pour un critère de performance donné, il peut être préférable de choisir un modèle sous-optimal mais « satisfaisant » plutôt qu'un modèle optimal.





# Méthodes approchées en analyse modale

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Modèle linéaire d'un système dynamique . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Méthodes de condensation et de synthèse modale . . . . .</b>	<b>10</b>
1.2.1	Bases de représentation du mouvement . . . . .	11
1.2.2	Classification des méthodes de sous-structuration . . . . .	14
1.2.3	Couplage des sous-structures . . . . .	15
1.2.4	Méthodes de sous-structuration . . . . .	16
<b>1.3</b>	<b>Réanalyse approchée . . . . .</b>	<b>18</b>
1.3.1	Réanalyse approchée paramétrique . . . . .	20
<b>1.4</b>	<b>Méthodes d'approximation par métamodèles . . . . .</b>	<b>24</b>
1.4.1	Surfaces de réponse . . . . .	24
1.4.2	Le krigeage . . . . .	26
1.4.3	Les réseaux de neurones . . . . .	27
1.4.4	Choix d'une méthode d'approximation . . . . .	33
<b>1.5</b>	<b>Paramétrisation de modèle . . . . .</b>	<b>39</b>
1.5.1	Analyse de sensibilité en présence d'incertitudes . . . . .	39
1.5.2	Localisation d'erreurs . . . . .	47

Ce chapitre aborde différents outils d'analyse utilisés dans ce travail. Après avoir précisé le modèle dynamique utilisé, nous abordons le problème de l'approximation des réponses dynamiques d'un système mécanique. Une revue non exhaustive de différentes méthodes d'approximation basées sur la réduction modale et sur une approche par métamodèles est réalisée. Nous étudions aussi le problème de la réanalyse approchée après modifications structurales. Enfin, nous discutons de la paramétrisation de modèle et présentons quelques méthodes de sensibilité et de localisation.

## 1.1 Modèle linéaire d'un système dynamique

Pour faciliter la lecture de ce mémoire, nous présentons la formulation du modèle dynamique linéaire utilisée.

Nous considérons ici l'étude dynamique d'un système mécanique à comportement linéaire. Le système étant modélisé par la méthode des éléments finis, le comportement dynamique de la structure sera représenté dans le domaine temporel par le système différentiel d'ordre 2 et de dimension  $N$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (1.1)$$

Les matrices de masse  $\mathbf{M}$ , d'amortissement  $\mathbf{B}$  et de raideur  $\mathbf{K}$  sont supposées carrées d'ordre  $N$ , symétriques à valeurs réelles. De plus, la matrice  $\mathbf{M}$  est supposée définie positive, et les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{K}$  définies non-négatives. Les vecteurs  $\mathbf{y}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{y}}(t)$  et  $\ddot{\mathbf{y}}(t) \in \mathbb{R}^{N,1}$  contiennent respectivement les déplacements, vitesses et accélérations sur les degrés de liberté – ddl – du maillage élément finis. Le vecteur des entrées contenant les excitations extérieures est noté  $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^{N,1}$ .

Nous considérons désormais que la matrice d'amortissement est nulle et donc que le système est conservatif. Nous nous plaçons en régime harmonique stationnaire. Dans ce cas,  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{f} e^{j\omega t}$  et  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} e^{j\omega t}$  avec  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{y}$  respectivement les vecteurs complexes des excitations extérieures et des déplacements à une pulsation d'excitation  $\omega$  et  $j^2 = -1$ . Dans ces conditions, l'équation d'équilibre du système conservatif associé – SCA – s'écrit

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y} = \mathbf{f}. \quad (1.2)$$

Cette expression peut aussi être écrite en fonction de la raideur – ou impédance – dynamique  $\mathbf{Z}(\omega)$  et ainsi

$$\mathbf{Z}(\omega) \mathbf{y} = \mathbf{f}. \quad (1.3)$$

L'équation caractéristique du système homogène correspondant au régime libre est donnée par

$$(\mathbf{K} - \omega_v^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\phi}_v = 0. \quad (1.4)$$

Ce système linéaire admet  $N$  valeurs propres réelles positives  $\lambda_v = \omega_v^2$  et  $N$  vecteurs propres associés  $\boldsymbol{\phi}_v \in \mathbb{R}^{N,1}$  aussi appelés modes normaux. En regroupant les valeurs propres dans la matrice spectrale diagonale  $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_N^2) \in \mathbb{R}^{N,N}$  et les vecteurs propres dans la matrice modale  $\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_2 \dots \boldsymbol{\phi}_N] \in \mathbb{R}^{N,N}$ , nous pouvons écrire le problème aux valeurs propres généralisé

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} - \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Lambda} = 0. \quad (1.5)$$

Par rapport aux matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$ , les vecteurs propres satisferont les propriétés d'orthogonalité

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Lambda} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{I}_{NN}, \quad (1.6)$$

où  $\mathbf{I}_{NN}$  est la matrice identité d'ordre  $N$ .

Le calcul de la réponse forcée de l'équation (1.3) à une pulsation donnée, nécessite l'inversion de  $\mathbf{Z}(\omega)$ . Par exemple, lors du calcul d'une fonction de réponse fréquentielle – FRF –, l'inversion directe de cette matrice en chaque point fréquentiel entraînerait d'importants

efforts de calcul. Pour cette raison, le calcul des réponses par superposition modale est en général préféré au calcul direct. Cette approche consiste à projeter la réponse  $\mathbf{y}$  sur la base modale  $\Phi$ . Ainsi

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{q}, \quad (1.7)$$

et compte tenu des relations de norme (1.6) en prémultipliant par  $\Phi^T$

$$(\Lambda - \omega^2 \mathbf{I}_{NN}) \mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{f}. \quad (1.8)$$

$\mathbf{q}$  est un vecteur de coordonnées généralisées.

À noter que pour le calcul d'une FRF, le terme  $(-i\omega \beta \mathbf{q})$  – avec  $i^2 = -1$  – est ajouté dans l'équation afin de représenter un amortissement généralisé,  $\beta$  étant une matrice d'amortissement généralisé diagonale. Le système obtenu n'est toutefois pas équivalent au système 1.1.

Le système (1.5) étant de taille  $N$ , il est théoriquement possible d'extraire  $N$  solutions propres. Cependant, nous nous intéressons généralement au comportement basses fréquences de la structure et donc seules les  $m$  premières solutions propres nécessitent d'être calculées. En général  $m \ll N$  et par ailleurs, le MEF cesse d'être valide à partir d'une fréquence limite au-delà de laquelle les modes deviennent non-physiques. Pour des MEF de grandes tailles, la technique usuelle pour résoudre le système (1.5) est d'utiliser une procédure itérative où seules les  $m$  premières solutions propres ou les  $m$  solutions propres comprises dans une bande de fréquence donnée sont calculées. Pour un système comportant des matrices symétriques, la méthode de Lanczos [43, 111] s'avère une des techniques les plus efficaces d'un point de vue numérique.

Considérons une bande fréquentielle d'analyse  $[0 ; \Omega]$ . Les  $m$  modes propres compris dans cette bande sont calculés. La base modale se réduit donc à  $\Phi_m = [\phi_1 \phi_2 \cdots \phi_m] \in \mathbb{R}^{N,m}$ , de matrice spectrale  $\Lambda_m$ . Soient  $\Phi_{N-m}$  et  $\Lambda_{N-m}$  leurs matrices complémentaires, telles que

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_m & \Phi_{N-m} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Lambda_m & 0 \\ 0 & \Lambda_{N-m} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Si nous utilisons la superposition modale,  $\mathbf{y}$  est cette fois projetée sur  $\Phi_m$ . Les modes de  $\Phi_{N-m}$  n'étant pas pris en compte, l'utilisation de cette base incomplète induit une erreur sur les réponses calculées dans la bande d'analyse, notamment en très basses fréquences et aux antirésonances. Il peut alors convenir de calculer et d'utiliser les modes compris dans une bande fréquentielle étendue. Il est généralement conseillé d'extraire les modes compris dans une bande fréquentielle de 1,5 à 3 fois  $\Omega$ .

Une autre approche consiste à appliquer une procédure de correction statique [69].  $\Phi_m$  se limitant aux modes compris dans la bande d'analyse, la contribution des modes non considérés est approximée par des résidus statiques. En utilisant l'équation (1.8) et la relation (1.7), nous obtenons la réponse

$$\mathbf{y} = \Phi_m (\Lambda_m - \omega^2 \mathbf{I}_{mm})^{-1} \Phi_m^T \mathbf{f} + \Phi_{N-m} (\Lambda_{N-m} - \omega^2 \mathbf{I}_{N-mN-m})^{-1} \Phi_{N-m}^T \mathbf{f}. \quad (1.10)$$

Les termes d'inerties associés aux modes non calculés sont négligés et alors

$$\mathbf{y} = \Phi_m (\Lambda_m - \omega^2 \mathbf{I}_{mm})^{-1} \Phi_m^T \mathbf{f} + \Phi_{N-m} \Lambda_{N-m}^{-1} \Phi_{N-m}^T \mathbf{f}. \quad (1.11)$$

Le terme  $\Phi_{N-m} \Lambda_{N-m}^{-1} \Phi_{N-m}^T$  est appelé flexibilité statique résiduelle. Nous la noterons  $\mathbf{R}$  puisqu'il contient les résidus recherchés. La base  $\mathbf{R}$  est calculée à l'aide des modes retenus par

$$\mathbf{R} = \Phi_{N-m} \Lambda_{N-m}^{-1} \Phi_{N-m}^T = \mathbf{K}^{-1} - \Phi_m \Lambda_m^{-1} \Phi_m^T. \quad (1.12)$$

Nous verrons au paragraphe 1.2.1 comment réaliser ce calcul dans le cas où  $\mathbf{K}$  est singulière.

La réponse sera alors approchée par

$$\mathbf{y} = \Phi_m \mathbf{q}_m + \mathbf{R} \mathbf{f}. \quad (1.13)$$

Le vecteur des excitations  $\mathbf{f}$  n'ayant que  $f$  composantes non-nulles correspondant aux points d'excitation, on constate que seules les  $f$  colonnes correspondantes de  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N,N}$  nécessitent d'être calculées. La réponse sera projetée sur  $[\Phi_m \mathbf{R}_f]$  avec  $\mathbf{R}_f \in \mathbb{R}^{N,f}$ , base des  $f$  modes de flexibilité résiduelle. Puisque que le coût de calcul des résidus statiques est limité, cette méthode est en général préférée à l'usage d'une base modale étendue.

## 1.2 Méthodes de condensation et de synthèse modale

Les méthodes de synthèse modale sont basées sur la méthode de Rayleigh-Ritz et peuvent être regroupées en trois familles très étroitement liées :

- les méthodes utilisant les coordonnées généralisées ;
- les méthodes de condensation sur des ddls physiques ;
- les méthodes de sous-structuration dynamique.

Dans les méthodes utilisant les coordonnées généralisées, le système d'équation est réduit en utilisant une base tronquée de vecteurs devant satisfaire les conditions limites en force et en déplacement. Comme nous l'avons vu dans la section précédente, cette base peut être formée par les modes normaux du système.

La deuxième famille contient les méthodes où le modèle est divisé en ddls maîtres et en ddls esclaves, ces derniers étant réduits par condensation statique ou dynamique.

Enfin, viennent les méthodes de sous-structuration sur lesquelles nous allons nous attarder désormais. Elles consistent à diviser le système en sous-structures, à les analyser et les réduire séparément, puis les coupler en respectant les contraintes aux interfaces pour obtenir un modèle réduit global. La sous-structuration a l'avantage de permettre la préparation et la vérification des modèles des sous-structures indépendamment les uns des autres. Ceci prend toute son importance pour l'étude des structures complexes – voitures, avions, véhicules spatiaux, *etc.* – dont les études des sous-ensembles sont confiées à différents sous-traitants. De plus, des modifications dans la conception d'une sous-structure n'entraînent pas nécessairement l'analyse de la structure complète. Quand la sous-structure est constituée de sous-ensembles identiques répétitifs, cette méthode permet de minimiser la préparation des données et le temps de calcul. Les vecteurs de base choisis pour chaque sous-structure sont des modes de déformation statique et des modes propres avec des conditions aux limites fixes, libres ou hybrides.

La synthèse modale consiste à approximer le comportement dynamique de chaque sous-structure par une combinaison linéaire de  $k$  vecteurs formant une base de Ritz  $\mathbf{T}$ . Le nombre de ddls de la sous-structure est alors réduit à  $k$ . Pour chaque sous-structure de dimension  $N$ , la relation de passage entre le vecteur  $\mathbf{y}$  des  $N$  coordonnées physiques et le vecteur  $\mathbf{q}$  des  $k$  coordonnées généralisées s'exprime par

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{q}. \quad (1.14)$$

Les matrices condensées de masse, de raideur ainsi que le vecteur condensé des excitations extérieures sont construits à partir des relations

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^c &= \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}, \\ \mathbf{M}^c &= \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T} \quad \text{et} \\ \mathbf{f}^c &= \mathbf{T}^T \mathbf{f}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Il reste ensuite à assembler les matrices de masse et de raideur condensées des différentes sous-structures – voir paragraphe 1.2.3.

Les différentes méthodes de sous-structuration ne diffèrent que par des choix particuliers des vecteurs composants  $\mathbf{T}$ . Les types de modes les plus couramment utilisés en synthèse modale sont présentés dans le paragraphe suivant. Ici, seules les bases de Ritz sont utilisées, mais il faut tout de même noter qu'il existe des approches utilisant d'autres types de vecteurs, par exemple les vecteurs de Krylov [6, 9, 40, 42].

### 1.2.1 Bases de représentation du mouvement

Dans la suite de cet exposé, nous serons amenés à répartir les ddls d'une sous-structure en :

- ddls de jonction désignés par l'indice  $j$ , correspondant aux ddls assurant la connexion avec les autres sous-structures ;
- ddls internes désignés par l'indice  $i$ , complémentaires aux ddls de jonction ( $i \oplus j = N$ ) ;
- ddls maîtres désignés par l'indice  $m$ , comprenant les ddls de jonction et certains ddls internes ;
- ddls esclaves désignés par l'indice  $s$ , complémentaires aux ddls maîtres ( $m \oplus s = N$ ) ;
- ddls de corps rigide désignés par l'indice  $r$  ( $r \leq 6$ ), regroupant les ddls permettant de rendre isostatique une structure présentant des modes de corps rigide et choisis de préférence parmi les ddls internes ;
- ddls de corps déformable désignés par l'indice  $d$ , complémentaires aux ddls de corps rigide ( $r \oplus d = N$ ).

#### Modes normaux

Ces modes sont des vecteurs propres qui, suivant la nature des conditions limites du modèle ou de la sous-structure, seront classés en modes normaux à interface libre, fixe, chargée ou mixte.

**Modes normaux à interface libre.** Les modes normaux à interface libre sont les modes élastiques obtenus en respectant les conditions aux limites naturelles. Si la sous-structure est en condition limite libre-libre, la base  $\Phi$  issue de la résolution du problème homogène (1.5) possède  $r$  modes de corps rigide à pulsations nulles. Les  $N - r$  modes élastiques de  $\Phi$  constitueront la base modale  $\Phi^e$  des modes à interface libre.

**Modes normaux à interface fixe.** Ces modes sont associés à l'ensemble  $i$  des ddls internes de la sous-structure, les ddls de jonction  $j$  étant considérés comme fixes. Ils sont obtenus par la résolution du problème homogène :

$$\mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii} - \mathbf{M}_{ii} \Phi_{ii} \Lambda_{ii} = 0, \quad (1.16)$$

avec  $\Phi_{ii}^T \mathbf{K}_{ii} \Phi_{ii} = \Lambda_{ii}$  et  $\Phi_{ii}^T \mathbf{M}_{ii} \Phi_{ii} = \mathbf{I}_{ii}$ .

La base complète des modes à interface fixe  $\Phi_i^f$  s'exprime selon

$$\Phi_i^f = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{ii} \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

**Modes normaux à interface chargée.** L'analyse modale est réalisée sur la sous-structure libre perturbée par adjonction de masse ou de raideur sur certains ddls de jonction. Pour des chargements convenablement choisis, les modes obtenus sont proches des modes de la structure assemblée et constituent ainsi une excellente base de représentation.

**Modes normaux à interface mixte.** Les modes normaux à interface mixte sont obtenus par blocage de certains ddls de jonction. Les déformées modales correspondent alors à un mélange entre les modes à interface libre et les modes à interface fixe.

### Modes contraints et modes de corps rigide

**Modes contraints.** Les modes contraints – ou modes statiques de jonction – sont des modes de déformation correspondant à des déplacements d'interface imposés. Ils correspondent aux réponses statiques des ddls internes lorsque des déplacements unitaires sont appliqués successivement sur chacun des ddls de jonction, les autres ddls de l'interface restant bloqués. Ils forment la matrice  $\Psi_j$  solution de

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{jj} & \mathbf{K}_{ji} \\ \mathbf{K}_{ij} & \mathbf{K}_{ii} \end{bmatrix} \Psi_j = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{jj} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

où  $\mathbf{F}_{jj}$  est la matrice constituée des efforts de réaction dus aux déplacements imposés.

L'expression des modes contraints est alors donnée par

$$\Psi_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{jj} \\ \Psi_{jj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{jj} \\ -\mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Il est facilement démontrable que

$$\Phi_i^f \mathbf{K} \Psi_j = 0. \quad (1.20)$$

Dans une base de projection, ces modes permettent d'assurer une prise en compte exacte de la partie statique du comportement issu de chargements dynamiques appliqués sur les ddls internes.

**Modes de corps rigide.** Dans le cas d'une structure libre, les modes de corps rigide sont des modes de déplacement d'ensemble à énergie de déformation nulle. Ce sont des modes normaux mais ils peuvent aussi être vus comme un cas particulier des modes contraints. Ils peuvent être obtenus par la résolution du système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{rr} & \mathbf{K}_{rd} \\ \mathbf{K}_{dr} & \mathbf{K}_{dd} \end{bmatrix} \Psi_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.21)$$

La deuxième ligne de l'équation (1.21) permet d'obtenir la relation

$$\Psi_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{rr} \\ \Psi_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{rr} \\ -\mathbf{K}_{dd}^{-1} \mathbf{K}_{dr} \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

La matrice de masse de corps rigide  $\mathbf{M}_{rr}$  est aussi définie par

$$\mathbf{M}_{rr} = \Psi_r^T \mathbf{M} \Psi_r. \quad (1.23)$$

Les ddls de corps rigide  $r$  doivent être judicieusement choisis afin de rendre isostatique la structure sous l'action de forces d'auto-équilibre appliquées au droit de ces ddls. L'application d'une procédure d'élimination de Gauss à la matrice de raideur peut servir à cet effet. Les ddls de corps rigide sont alors associés aux ddls correspondant à des pivots nuls [68].

### Modes d'attache

Les modes d'attache – ou modes de flexibilité statique – sont obtenus en appliquant successivement des forces unitaires sur les ddls d'interface  $j$ . Ils forment la matrice  $\mathbf{S}_j$  solution de

$$\mathbf{K} \mathbf{S}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{jj} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Si la sous-structure est libre elle possède des modes de corps rigide. La matrice  $\mathbf{K}$  est alors singulière et n'est donc pas inversible. Une méthode pour s'affranchir de ce problème est d'opérer un filtrage des modes de corps rigide [37, 68]. Pour cela, une matrice  $\mathbf{P}_r$  de filtrage des modes de corps rigide est construite telle que

$$\mathbf{P}_r = \mathbf{I}_{NN} - \mathbf{M} \Psi_r^T \mathbf{M}_{rr}^{-1} \Psi_r. \quad (1.25)$$

Après avoir calculé la matrice

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{dd}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (1.26)$$

matrice de flexibilité de la structure rendue isostatique par blocage des ddls de corps rigide,



la matrice de pseudo-flexibilité  $\mathbf{S}_j$  est obtenue par la relation

$$\mathbf{S}_j = \mathbf{P}_r^T \mathbf{G} \mathbf{P}_r \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{jj} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Lorsque le nombre de ddls de la sous-structure est élevé, l'application de cette méthode peut représenter un effort de calcul important. Dans l'équation (1.24), il est donc alors préférable de remplacer la matrice  $\mathbf{K}$  par  $\mathbf{K} + \alpha \mathbf{M}$ , avec  $\alpha$  pris égal à une fraction de la valeur propre associée au premier mode flexible  $\lambda_{\text{flex}}$  [11] – par exemple  $\lambda_{\text{flex}}/10 \leq \alpha \leq \lambda_{\text{flex}}$  [22]. Les modes d'attache « décalés » ainsi obtenus s'avèrent de très bonnes approximations des modes d'attache exacts.

Les modes d'attache calculés incluent les contributions de tous les modes propres de la sous-structure et en particulier les modes basses fréquences. Si ceux-ci ont déjà été inclus dans la base de projection, il est nécessaire de retirer des modes d'attache la contribution de ces modes. Les modes d'attache résiduels composent la base  $\mathbf{R}_j$  calculés par

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{S}_j - \left( \Phi_k^e \Lambda_k^{-1} (\Phi_k^e)^T \right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{jj} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

où  $\Phi_k^e$  est la matrice modale tronquée composée des modes à interface libre retenus pour la sous-structure et  $\Lambda_k$  la matrice spectrale associée.

## 1.2.2 Classification des méthodes de sous-structuration

Les méthodes de sous-structuration peuvent être classées en :

- méthodes avec interface fixe ;
- méthodes avec interface libre ;
- méthodes de substitution modale ;
- méthodes hybrides.

**Méthodes avec interface fixe.** Hurty [81] a développé une méthode pour l'analyse dynamique des sous-structures avec interfaces fixes. Craig et Bampton [38] ont présenté une variante de cette méthode plus intéressante sur le plan pratique. Cette méthode utilise comme modes de sous-structures les modes contraints et les modes propres à interface fixe. Nous reviendrons en détail sur cette méthode au paragraphe 1.2.4. Bamford [12] a montré que la prise en compte de modes d'attache améliorait la convergence de la procédure.

**Méthodes avec interface libre.** Les premières méthodes avec interfaces libres développées par Goldman [63] ou encore Hou [78], sont connues pour leurs mauvaises propriétés de convergence. MacNeal [127] et Rubin [170] ont montré que l'utilisation de la correction de flexibilité résiduelle, c'est-à-dire la prise en compte de l'effet statique des modes tronqués, permettait une amélioration significative de la précision de ces méthodes. Martinez [131] – voir paragraphe 1.2.4 – propose une variante des méthodes de MacNeal et Rubin permettant d'exprimer la matrice de transformation sous la même forme que celle obtenue par la méthode de Craig et Bampton.

**Méthodes de substitution modale.** Benfield et Hrurda [20] ont mis au point une méthode dite de substitution modale qui constitue une généralisation de la méthode des « *branch modes* » de Gladwell [62]. Ce type de méthode convient au cas d'une structure constituée d'une sous-structure principale et de sous-structures secondaires appelées « branches ». Cette méthode permet divers choix des modes propres du constituant principal : modes avec interface libre ou modes avec interface chargée, cette dernière option améliorant notablement la convergence.

**Méthodes hybrides.** MacNeal [127] a développé une méthode hybride de synthèse modale avec différentes corrections destinées à minimiser les effets de troncature modale. Hintz [73] a également présenté une méthode hybride avec d'excellentes propriétés de convergence. Enfin, la méthode de Craig et Chang [39] est une procédure générale de couplage de sous-structures permettant de formuler différentes méthodes sous une forme unifiée.

Il existe de nombreuses techniques de synthèse modale et il n'est pas facile de conclure quant au choix de la technique à retenir. Nous pouvons cependant dégager quelques caractéristiques indispensables à l'obtention de résultats acceptables :

- il convient de choisir *a priori* un nombre de modes normaux dans la base de condensation de chaque sous-structure selon son importance ou sa contribution dans le comportement dynamique de la structure complète. Une structure souple nécessite une base de projection relativement large – modes normaux en nombre important – alors qu'une structure très raide peut être représentée à l'aide d'une base uniquement constituée de réponses statiques ;
- le nombre de modes composants d'une sous-structure doit être adapté en fonction de la bande d'analyse désirée ;
- les efforts externes et les efforts de liaison appliqués à la sous-structure nécessitent l'inclusion, dans la base de condensation de la sous-structure, de réponses statiques calculées pour des ddls concernés. Le modèle réduit sera ainsi statiquement exact.

### 1.2.3 Couplage des sous-structures

Les modèles réduits doivent être assemblés en respectant les équations de compatibilité des efforts et déplacements aux frontières sur les ddls de jonction. Pour  $p$  sous-structures devant être connectées sur une même interface, les deux contraintes employées lors de l'assemblage sont :

- la continuité des déplacements à l'interface, exprimée par

$$\mathbf{y}_j^1 = \dots = \mathbf{y}_j^k = \dots = \mathbf{y}_j^p ; \quad (1.29)$$

- l'équilibre des efforts de jonction, exprimé par

$$\sum_{k=1}^p \mathbf{f}_j^k = 0. \quad (1.30)$$

Une approche assez générale pour assembler les sous-structures est d'employer les multiplicateurs de Lagrange. Ceux-ci sont associés aux équations de contraintes sur les dépla-

cements à l'interface telles que (1.29) ou à d'autres équations spécifiques à la méthode de condensation utilisée. L'emploi des équations de Lagrange et le partitionnement des ddls généralisés en ddls dépendants et linéairement indépendants permet d'aboutir à l'équation du mouvement régissant le système couplé [37, 39].

Si les ddls généralisés contiennent les ddls de jonction des sous-structures – c'est le cas des méthodes utilisées pour ce travail – cette procédure conduit simplement à un assemblage explicite sur les ddls de jonction similaire à une procédure d'assemblage élémentaire. La mise en oeuvre numérique est alors grandement facilitée mais en contre partie, tous les ddls de jonctions doivent être conservés. Dans les cas d'une structure complexe, la taille du modèle réduit final peut alors demeurer importante. Cependant, des stratégies existent pour surmonter ce problème. Par exemple, Brahmi [26] propose une méthode de condensation à deux niveaux où le deuxième niveau s'attache à réduire le nombre de ddls de jonction.

Si l'on souhaite éliminer complètement les ddls de jonction, on pourra utiliser des techniques de synthèse modale telles que les méthodes de MacNeal [127] ou de Rubin [170], méthodes où le couplage est réalisé par élimination des efforts de liaison résiduels et dont le modèle condensé final est exempt des coordonnées relatives aux ddls de jonction.

### 1.2.4 Méthodes de sous-structuration

Dans la suite de ce mémoire, nous serons amenés à utiliser quelques méthodes de sous-structuration parmi les plus populaires. Nous allons donc exposer brièvement les méthodes de sous-structuration de Guyan, de Craig-Bampton et de Martinez. Pour plus de généralité, le partitionnement en ddls maîtres et esclaves sera adopté pour chaque sous-structure. Les ddls maîtres se composent des ddls de jonction et de ddls internes choisis suivant certains critères ou imposés pour répondre à des besoins spécifiques tels que la confrontation essais-calculs, la visualisation des modes propres ou la prise en compte statique de sollicitations extérieures. Suivant ce partitionnement, l'équation d'équilibre dynamique en coordonnées physiques s'écrit

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{mm} & \mathbf{K}_{ms} \\ \mathbf{K}_{sm} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{mm} & \mathbf{M}_{ms} \\ \mathbf{M}_{sm} & \mathbf{M}_{ss} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

où le vecteur  $\mathbf{f}_m$  contient les forces de réaction  $\mathbf{f}_j$  résultant des déplacements des ddls de jonction  $\mathbf{y}_j$  et les éventuels chargements extérieurs.

#### Méthode de Guyan

Dans la sous-structuration de Guyan ou Guyan-Irons [67, 80], la matrice de passage en coordonnées généralisées est uniquement constituée par des modes contraints tels que définis par l'équation (1.19). Ici les déplacements sont imposés sur des ddls maîtres  $m$  qui seront donc conservés, les ddls complémentaires dits esclaves  $s$  étant éliminés. La matrice de réduction de Guyan  $\mathbf{T}_G$  de chaque sous-structure est alors

$$\mathbf{T}_G = \mathbf{\Psi}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} \\ \mathbf{\Psi}_{sm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} \\ -\mathbf{K}_{ss}^{-1} \mathbf{K}_{sm} \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Le système d'équation résultant de la transformation du système 1.31 est

$$(\mathbf{K}_G^c - \omega_v^2 \mathbf{M}_G^c) \mathbf{y}_m = \mathbf{f}_m, \quad (1.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G^c &= \mathbf{K}_{mm} + \mathbf{K}_{ms} \mathbf{\Psi}_{sm} \quad \text{et} \\ \mathbf{M}_G^c &= \mathbf{M}_{mm} + \mathbf{M}_{ms} \mathbf{\Psi}_{sm} + \mathbf{\Psi}_{ms} (\mathbf{M}_{sm} + \mathbf{M}_{ss} \mathbf{\Psi}_{sm}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Du choix des ddls maîtres dépend principalement la qualité des solutions du modèle réduit. Nous reviendrons plus en détails sur ce sujet en section 2.3.

### Méthode de Craig-Bampton

La méthode de Craig-Bampton [37, 38] permet d'étendre le domaine de validité de la transformation de Guyan en enrichissant la base des modes contraints par des modes normaux à interface fixe. Bien que celle-ci soit classiquement définie sur les ensembles des ddls de jonction  $j$  et internes  $i$ , elle sera ici exprimée sur  $m$  et  $s$ . Les coordonnées généralisées associées à cette méthode sont composées de coordonnées physiques  $\mathbf{y}_m$  associées aux ddls maîtres – qui peuvent se réduire aux ddls de jonction – et de coordonnées modales  $\mathbf{q}_k$  associées à  $k$  modes de la base des modes normaux à interface fixe  $\mathbf{\Phi}_s^f$ . Au paragraphe 2.2.1, seront présentés des indicateurs permettant de faciliter le choix de ces modes. La matrice de transformation de Craig-Bampton  $\mathbf{T}_{CB}$  est définie par

$$\mathbf{T}_{CB} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} & 0 \\ \mathbf{\Psi}_{sm} & \mathbf{\Phi}_{sk} \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

Le problème aux valeurs propres condensé s'écrit

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_G^c & 0 \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_{kk} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_G^c & \mathbf{L}_{mk} \\ \mathbf{L}_{km} & \mathbf{I}_{kk} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

avec

$$\mathbf{L}_{mk} = (\mathbf{M}_{ms} + \mathbf{\Psi}_{ms} \mathbf{M}_{ss}) \mathbf{\Phi}_{sk}. \quad (1.37)$$

On notera l'absence de couplage statique entre les ddls maîtres et les coordonnées modales. La précision des approximations obtenues et sa facilité de mise en oeuvre en font une méthode très utilisée dans l'industrie.

### Méthode de Martinez *et al.*

Cette technique de synthèse modale [131] exploite les formulations proposées par MacNeal [127] et Rubin [170] mais se différencie par sa mise en oeuvre. Toujours en respectant la partition ddls maîtres et esclaves, les éventuels modes de corps rigide  $\mathbf{\Psi}_r$ , la base tronquée  $\mathbf{\Phi}_k^e$  des modes normaux à interface libre et les modes d'attache résiduels de  $\mathbf{R}_m$  sont combinés pour obtenir la matrice de transformation de Rubin. Le passage des coordonnées

physiques aux coordonnées généralisées est défini par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{mm} & \Psi_{mr} & \Phi_{mk} \\ \mathbf{R}_{sm} & \Psi_{sr} & \Phi_{sk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_m \\ \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{mm} & \hat{\Phi}_{mk} \\ \mathbf{R}_{sm} & \hat{\Phi}_{sk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_m \\ \mathbf{q}_{r+k} \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

où  $\hat{\mathbf{f}}_m$  est le vecteur des coordonnées de type efforts éliminé au profit de  $\mathbf{y}_m$  afin d'obtenir une matrice de transformation  $\mathbf{T}_{MA}$  de la même forme que celle de Craig-Bampton. La relation 1.38 devient alors

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} & 0 \\ \mathbf{R}_{sm} \mathbf{R}_{mm}^{-1} & \hat{\Phi}_{sk} - \mathbf{R}_{sm} \mathbf{R}_{mm}^{-1} \hat{\Phi}_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{q}_{r+k} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{MA} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{q}_{r+k} \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

Après calculs, compte tenu de la norme employée, nous pouvons obtenir le problème réduit associé [131]

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{mm}^{-1} & -\mathbf{R}_{mm}^{-1} \hat{\Phi}_{mk} \\ -\hat{\Phi}_{km} \mathbf{R}_{mm}^{-1} & \Lambda_{kk} + \hat{\Phi}_{km} \mathbf{R}_{mm}^{-1} \hat{\Phi}_{mk} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{mm} & -\mathbf{J}_{mm} \hat{\Phi}_{mk} \\ -\hat{\Phi}_{km} \mathbf{J}_{mm} & \mathbf{I}_{kk} + \hat{\Phi}_{km} \mathbf{J}_{mm}^{-1} \hat{\Phi}_{mk} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{q}_{r+k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

où  $\mathbf{J}_{mm} = \mathbf{R}_{mm}^{-1} \mathbf{R}_m^T \mathbf{M} \mathbf{R}_m \mathbf{R}_{mm}^{-1}$  est une matrice de couplage dynamique.

Le modèle réduit préserve le comportement dynamique et statique du modèle initial de la sous-structure dans la bande fréquentielle correspondant aux modes libres inclus dans la base de transformation.

### Avantages et inconvénients

Les trois méthodes ont l'avantage d'être faciles à mettre en oeuvre. En préservant les ddls de jonction, ces techniques facilitent l'assemblage des super-éléments. En contrepartie, si le nombre de ddls d'interface est élevé, le modèle réduit peut rester de taille conséquente.

La méthode de Guyan-Irons est réservée au domaine basses fréquences et sa précision dépend fortement du choix des ddls maîtres. La méthode de Craig-Bampton est la méthode de sous-structuration la plus utilisée. Elle s'adapte à la plupart des structures et donne des résultats très satisfaisants et stables. Elle est peu compatible avec des données expérimentales car elle nécessiterait des modes à interface fixe expérimentaux difficiles à mesurer. Les modes libres étant plus faciles à mesurer, la méthode de Martinez permet plus facilement d'utiliser des modes expérimentaux. Cette méthode est aussi un peu plus précise que la méthode de Craig-Bampton mais a l'inconvénient de demander plus de précautions lors notamment du calcul des modes d'attache résiduels pour des sous-structures libres.

## 1.3 Réanalyse approchée

Le concept de réanalyse approchée est attaché aux modifications structurales de modèles numériques. Les méthodes de réanalyse cherchent à approximer les réponses de la structure modifiée en se basant seulement sur les solutions du modèle original. Les modifications apportées peuvent être d'ordre topologiques – modifications de formes, ajouts de raidisseurs, modifications des conditions limites, *etc.* – ou paramétriques telles que des modifications globales ou locales de propriétés physiques de masse, de raideur, d'épaisseur, *etc.*

Nous n'aborderons ici que les modifications paramétriques. On pourra cependant trouver dans [36] une méthode originale de modification structurale dynamique permettant de traiter à partir de mesures expérimentales des structures subissant des ajouts ou retracts d'appendices ou encore des modifications de conditions limites.

En ce qui concerne l'amplitudes des modifications, nous distinguerons :

- les perturbations paramétriques faibles, les variations d'un paramètre concernent seulement un faible pourcentage de la valeur de référence et n'entraînent généralement pas une modification de la nature des modes de la structure modifiée ;
- les perturbations paramétriques fortes, les variations peuvent aller au-delà du double des valeurs initiales, la nature des modes peut alors être fortement changée.

Dans le paragraphe suivant, nous présentons succinctement différentes approches couramment appliquées pour la réanalyse par sous-structuration de modèles devant être modifiés paramétriquement. Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un amortissement nul et donc le MEF initial ou un sous-ensemble seront représentés par les seules matrices de raideur et de masse  $\mathbf{K}_0$  et  $\mathbf{M}_0$ . Les matrices de modifications structurales respectivement associées seront notées  $\Delta\mathbf{K}$  et  $\Delta\mathbf{M}$ . Ces matrices sont aussi appelées matrices de correction. Les matrices modifiées seront notées  $\mathbf{K}_m = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}_m = \mathbf{M}_0 + \Delta\mathbf{M}$ .

Le système initial étant caractérisé par l'équation (1.3), l'équilibre dynamique d'une sous-structure modifiée soumise aux seules forces de jonction  $\mathbf{f}_j$  s'écrit

$$(\mathbf{Z}(\omega_m) + \Delta\mathbf{Z}(\omega_m)) \mathbf{y}_m = \mathbf{f}_j, \quad (1.41)$$

avec  $\mathbf{Z}(\omega_m) = \mathbf{K}_0 - \omega_m^2 \mathbf{M}_0$  et  $\Delta\mathbf{Z}(\omega_m) = \Delta\mathbf{K} - \omega_m^2 \Delta\mathbf{M}$ .

En utilisant la base de condensation  $\mathbf{T}_0$  obtenue à partir du système initial, la réponse  $\mathbf{y}_m$  du système modifié s'exprime

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{T}_0 \mathbf{q} + \delta\mathbf{y}_m, \quad (1.42)$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des coordonnées généralisées et  $\delta\mathbf{y}_m$  un terme de correction.

En général, les modifications concernent des zones plus ou moins larges du système et portent sur un sous-ensemble de paramètres de conception identifiés comme étant importants au regard du problème étudié. La détermination de ces paramètres est communément appelée paramétrisation du modèle. Dans le cadre d'une procédure d'optimisation, des méthodes de sensibilité locale ou globale sont généralement employées. Des méthodes de localisation d'erreurs sont aussi utilisées en complément dans les procédures de recalage. Nous reviendrons plus en détails sur ces méthodes en section 1.5.

Réécrivons  $\Delta\mathbf{K}$  et  $\Delta\mathbf{M}$  sous la forme

$$\Delta\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{K}_{\Delta x_i}^{\text{zone}} \quad \text{et} \quad \Delta\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n_p} \mathbf{M}_{\Delta x_i}^{\text{zone}}, \quad (1.43)$$

avec  $x_i$  un des  $n_p$  paramètres modifié dont la variation est  $\Delta x_i$ .  $\mathbf{K}_{\Delta x_i}^{\text{zone}}$  et  $\mathbf{M}_{\Delta x_i}^{\text{zone}}$  sont des matrices creuses où seuls les coefficients associés aux ddl des éléments d'une zone subissant des modification sont non nuls. Il est aussi possible et préférable de factoriser ces matrices afin de les exprimer sous la forme d'une somme pondérée de matrices ne dépendant pas du paramètre [8, 133]. Ainsi, en utilisant des coefficients de correction adimensionnels,  $\mathbf{K}_{\Delta x_i}^{\text{zone}}$

peut être factorisée sous la forme

$$\mathbf{K}_{\Delta x_i}^{\text{zone}} = \frac{\Delta x_i}{x_i} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \alpha_j x_i^{\alpha_j} \mathbf{K}_i^{\text{zone}}, \quad (1.44)$$

où  $\mathbf{K}_i^{\text{zone}}$  est le pendant de  $\mathbf{K}_{\Delta x_i}^{\text{zone}}$  mais sans modification. Les paramètres  $x_i$  pouvant intervenir non-linéairement dans les matrices de correction, des coefficients  $\alpha_j$  sont introduits. C'est le cas par exemple pour les modèles plaques ou coques, où il convient de décomposer la matrice de raideur élémentaire globale en matrice de raideur de membrane  $\mathbf{K}_m^{\text{zone}}$ , flexion  $\mathbf{K}_f^{\text{zone}}$  et de couplage membrane-flexion si le cisaillement transversal est considéré. Dans la formulation de Kirchhoff-Love, l'épaisseur  $e$  a une contribution linéaire en membrane et cubique en flexion. D'après l'équation (1.44), une variation d'épaisseur  $\Delta e$  entraîne donc une variation de raideur

$$\mathbf{K}_{\Delta e}^{\text{zone}} = \frac{\Delta e}{e} \left( e \mathbf{K}_m^{\text{zone}} + 3 e^3 \mathbf{K}_f^{\text{zone}} \right). \quad (1.45)$$

### 1.3.1 Réanalyse approchée paramétrique

Les méthodes présentées ici utilisent la base de réduction du modèle original pour déterminer les réponses du système modifié.

Dans un premier temps, il est toujours utile de vérifier si la base de réduction initiale ne pourrait pas être employée pour condenser le MEF modifié. En effet, il se peut que celle-ci soit suffisamment robuste vis-à-vis des modifications apportées au modèle. C'est le cas lorsque le niveau de perturbation représente un faible pourcentage, la nature des modes n'est quasiment pas modifiée et par conséquent le terme  $\delta \mathbf{y}_m$  de l'équation (1.42) peut être négligé. Toutefois, nous avons déjà fait remarquer que les modifications peuvent être associées à de forts niveaux de perturbations. La base de réduction initiale est aussi robuste lors de modifications globales, la structure subissant une perturbation linéaire globale de masse et/ou de raideur. Dans ce cas, les valeurs propres et amplitudes des modes propres varient mais la forme des modes propres du système perturbé reste inchangée. Cependant, dans les autres cas, la base de réduction initiale s'avère beaucoup moins performante. Étendre la base en conservant un plus grand nombre de modes normaux peut éventuellement améliorer la prédiction mais la convergence est très lente.

L'utilisation de la décomposition en série de Taylor est une approche couramment utilisée en réanalyse approchée [14, 133, 208]. Au premier ordre, nous obtenons

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{y}_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial \mathbf{y}_0}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n_p} \mathcal{O}(\Delta x_i^2). \quad (1.46)$$

$\mathbf{y}_0$  est la réponse du système initial pouvant être calculée à l'aide de la base de réduction associée et  $\partial \mathbf{y}_0 / \partial x_i$  la sensibilité à l'ordre un du vecteur réponse par rapport au paramètre modifié  $x_i$ . La difficulté réside dans le calcul des dérivées partielles. Ces dernières sont généralement calculées en utilisant des méthodes utilisant les différences finies, des méthodes analytiques ou des méthodes semi-analytiques combinant les deux premières approches. Le coût de calcul de cette méthode peut devenir prohibitif si le nombre de paramètres est important et/ou si les dérivées d'ordre un ou deux ne suffisent pas pour représenter cor-

rectement la réponse  $\mathbf{y}_m$ . C'est le cas notamment pour des modifications paramétriques de niveau important. Cette méthode de perturbation est donc plutôt utilisée pour le calcul de réponses stochastiques dans le cadre par exemple des éléments finis stochastiques [66].

L'enrichissement de la base de réduction initiale par des vecteurs judicieusement choisis est une autre approche. Par exemple, Balmès [8, 9] calcule les bases de condensation d'un échantillon de modèles – un modèle correspondant à des valeurs particulières des paramètres de conception – puis les combine pour obtenir la base de réduction finale. Le résultat est alors précis pour chacune des valeurs échantillonnées et très bon pour les points intermédiaires. Néanmoins, la méthode semble limitée aux cas où peu de paramètres sont considérés. Dans le cas contraire, le nombre d'échantillons et donc de calculs devient prohibitif. Le nombre de vecteurs de la base de réduction devient alors important, augmentant ainsi la taille du modèle réduit.

La méthode proposée au LMARC [21, 24, 122, 133] consiste à compléter la base de réduction initiale par une base de taille minimale approximant l'effet statique des modes négligés et prenant en compte une information *a priori* sur les modifications réalisées. En introduisant la notion de forces  $\mathbf{f}_\Delta$  associées aux modifications  $\Delta\mathbf{Z}(\omega_m)$  du modèle, l'équation (1.41) est interprétée comme l'équation d'équilibre dynamique du modèle initial soumis aux sollicitations  $\mathbf{f}_\Delta$  et ainsi

$$\mathbf{Z}(\omega_m) \mathbf{y}_m = \mathbf{f}_\Delta + \mathbf{f}_j, \quad (1.47)$$

avec

$$\mathbf{f}_\Delta = -\Delta\mathbf{Z}(\omega_m) \mathbf{y}_m. \quad (1.48)$$

La réponse du système dynamique modifié s'exprime à l'aide d'une base de condensation  $\mathbf{B}$  obtenue à partir du système initial enrichie de résidus statiques  $\mathbf{R}_\Delta$ . Les résidus statiques  $\mathbf{R}_\Delta$  sont associés à une suite de chargements statiques représentatifs des modifications  $\Delta\mathbf{Z}(\omega)$ . Une base de réduction enrichie  $\mathbf{T}_E$  commune au système initial et modifié est alors construite telle que

$$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{R}_\Delta \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

La base  $\mathbf{B}$  n'est pas nécessairement la base de condensation initiale complète. Par exemple, elle peut être la base des modes normaux à interface fixe dans le cadre de la méthode de Craig-Bampton, la base des modes normaux à interface libre pour la méthode de Martinez, ou tout simplement la base modale tronquée dans le cadre d'une condensation directe.

D'après la relation (1.48), le vecteur d'effort  $\mathbf{f}_\Delta$  associé aux modifications  $\Delta\mathbf{Z}(\omega)$  dépend de la réponse  $\mathbf{y}_m$  du système modifié. Cette réponse étant inconnue, le vecteur force  $\mathbf{f}_\Delta$  ne peut donc être déterminé exactement. En première approximation, la réponse  $\mathbf{y}_m$  du système modifié peut être remplacée par la réponse  $\mathbf{y}_0$  du système initial de sorte que les forces de modifications s'expriment par

$$\mathbf{f}_\Delta^0 \simeq -\Delta\mathbf{Z}(\omega_m) \mathbf{y}_0 = -\Delta\mathbf{Z}(\omega_m) \mathbf{B} \mathbf{q}. \quad (1.50)$$

Une base de forces  $\mathbf{F}_\Delta$  représentative du sous-espace associé à l'ensemble des modifications potentielles est ensuite générée à partir de l'équation (1.50). Pour un paramètre  $p_i$



intervenant linéairement dans les matrices de masse et de raideur, la sous-base  $\mathbf{F}_{\Delta p_i}$  est définie par l'expression

$$\mathbf{F}_{\Delta p_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\Delta p_i}^{\mathbf{K}} & \mathbf{F}_{\Delta p_i}^{\mathbf{M}} \end{bmatrix}, \quad (1.51)$$

avec

$$\mathbf{F}_{\Delta p_i}^{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_{\Delta p_i}^{\text{zone}} \mathbf{B} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{\Delta p_i}^{\mathbf{M}} = \mathbf{M}_{\Delta p_i}^{\text{zone}} \mathbf{B} \mathbf{\Lambda}. \quad (1.52)$$

Finalement, la base de forces  $\mathbf{F}_{\Delta}$  représentative de l'ensemble des modifications  $\Delta \mathbf{Z}(\omega)$  est construite par concaténation. Pour  $n_p$  paramètres intervenant linéairement –  $j = 1$  et  $\alpha_j = 1$  dans l'expression 1.44 – la base est donnée par

$$\mathbf{F}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\Delta p_1}^{\mathbf{K}} & \mathbf{F}_{\Delta p_1}^{\mathbf{M}} & \cdots & \mathbf{F}_{\Delta p_{n_p}}^{\mathbf{K}} & \mathbf{F}_{\Delta p_{n_p}}^{\mathbf{M}} \end{bmatrix}. \quad (1.53)$$

Comme indiqué par l'équation (1.45), dans le cas d'un paramètre intervenant non-linéairement, il convient de découpler chaque effet et de construire autant de sous-bases du type  $\mathbf{F}_{\Delta p_i}$  qu'il y a de coefficients  $\alpha_j$ .

La dernière étape est la construction d'une série de vecteurs de réponses statiques qui compléteront la base de condensation initiale  $\mathbf{T}_0$ . Ces vecteurs sont calculés de manière classique par

$$\mathbf{R}_{\Delta}^* = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F}_{\Delta}. \quad (1.54)$$

Dans le cas où  $\mathbf{K}^{-1}$  serait singulière, les méthodes indiquées au paragraphe 1.2.1 dans le calcul des modes d'attaches seront appliquées. De plus, si  $\mathbf{B}$  se réduit à une base tronquée de modes normaux déjà inclus dans la base  $\mathbf{T}_0$ , il est préférable de retirer la contribution de ces derniers. Si les méthodes de Craig-Bampton et de Martinez sont utilisées, nous avons respectivement

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_{sk} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \hat{\Phi}_k. \quad (1.55)$$

Les résidus seront alors

$$\mathbf{R}_{\Delta}^* = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_{\Delta} - (\mathbf{B} \mathbf{\Lambda}_k^{-1} \mathbf{B}^T) \mathbf{F}_{\Delta}. \quad (1.56)$$

Une décomposition en valeurs singulières est ensuite appliquée à la matrice  $\mathbf{R}_{\Delta}^*$  afin de garantir une parfaite indépendance linéaire des colonnes de la matrice. Cette procédure numérique très couramment utilisée sera abordée plus en détail en section 2.1. Ainsi,  $\mathbf{R}_{\Delta}^*$  se décompose sous la forme suivante

$$\mathbf{R}_{\Delta}^* = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad (1.57)$$

où  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont deux matrices réelles orthonormales et  $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice diagonale composée des  $n$  valeurs singulières de  $\mathbf{R}_{\Delta}^*$ . En choisissant les  $n_1$  plus grandes valeurs singulières, nous obtenons la réduction  $\mathbf{R}_{\Delta}$  de la sous-base  $\mathbf{R}_{\Delta}^*$  telle que

$$\mathbf{R}_{\Delta} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1. \quad (1.58)$$

Le choix du nombre  $n_1$  de valeurs singulières, et donc du nombre de colonnes à retenir, est fixé arbitrairement ou par un ratio associé à un conditionnement seuil fixé *a priori*. Les résidus obtenus sont ensuite normalisés par rapport à la matrice de masse du système initial et constituent la matrice de résidus  $\mathbf{R}_{\Delta}$  recherchée. La base de réduction  $\mathbf{T}$  précisée équa-

tion (1.49) est alors de rang maximum et de faible conditionnement.

Si la méthode de Martinez est utilisée, les résidus sont ajoutés avant la transformation.

En vue d'éviter l'obtention de modèles réduits trop importants, Masson *et al.* [133, 134] ont proposé une condensation à deux niveaux permettant d'éliminer l'ensemble des coordonnées généralisées associées aux vecteurs statiques résiduels. Cette méthode est cependant réservée à la technique de Craig-Bampton et s'applique lorsqu'au moins une modification en raideur est réalisée. Bouazizi *et al.* [23] proposent une extension de ce type de condensation enrichie aux cas de structures présentant des non-linéarités localisées.

Dans les méthodes utilisant une base de condensation, Kirsch propose la méthode des approximations combinées – *Combined Approximations* (CA) [34, 97–99]. Bien qu'initialement proposée pour la réanalyse de problèmes statiques linéaires, cette méthode a vu son utilisation étendue à la réanalyse en dynamique. Considérons les équations caractéristiques des systèmes homogènes correspondant au régime libre du système initial

$$\mathbf{K}_0 \boldsymbol{\phi}_{v_0} = \lambda_{v_0} \mathbf{M}_0 \boldsymbol{\phi}_{v_0}, \quad (1.59)$$

et du système modifié

$$\mathbf{K}_m \boldsymbol{\phi}_{v_m} = \lambda_{v_m} \mathbf{M}_m \boldsymbol{\phi}_{v_m}. \quad (1.60)$$

$(\lambda_{v_0}, \boldsymbol{\phi}_{v_0})$  est un couple valeur propre-vecteur propre du système initial et  $(\lambda_{v_m}, \boldsymbol{\phi}_{v_m})$  est le couple associé au système modifié. Le vecteur propre  $\boldsymbol{\phi}_{v_m}$  du système modifié est obtenu grâce à une base  $\mathbf{V}_v$  et se calcule par la relation

$$\boldsymbol{\phi}_{v_m} = \mathbf{V}_v \mathbf{q}_v, \quad (1.61)$$

$\mathbf{q}_v$  étant un vecteur de coordonnées généralisées. Le premier vecteur  $\mathbf{v}_1$  de  $\mathbf{V}_v$  est calculé selon

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{M}_m \boldsymbol{\phi}_{v_0}. \quad (1.62)$$

Les vecteurs additionnels sont les termes de la série binomiale. Ainsi

$$\mathbf{v}_2 = -\mathbf{B} \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k = -\mathbf{B} \mathbf{v}_{k-1}, \dots, \quad (1.63)$$

où  $\mathbf{B} = \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{K}$ .

Ces vecteurs sont ensuite normalisés par rapport à la masse puis orthogonalisés par la méthode de Gram-Schmidt afin d'améliorer le conditionnement. Le nombre de vecteurs à retenir dépend de la précision souhaitée mais généralement deux ou trois vecteurs suffisent pour obtenir une bonne approximation. Cette base est ensuite utilisée pour réduire le système (1.60).  $\mathbf{q}_v$  est alors le premier vecteur propre de ce système et  $\lambda_{v_m}$  la valeur propre associée, l'équation (1.61) permettant de calculer le vecteur propre complet. Le processus est ensuite reconduit pour chaque solution propre d'intérêt afin d'obtenir les solutions propres du système modifié.

À notre connaissance, la méthode CA a seulement été employée dans le cadre de la condensation directe. Son extension à la synthèse modale semble être une perspective de recherche intéressante. Cette méthode permet aussi de traiter des problèmes de modifications

topologiques [98, 169].

## 1.4 Méthodes d'approximation par métamodèles

L'avantage des méthodes de réduction est qu'après analyse du modèle réduit, il est possible de reconstruire la déformée complète du système étudié, la « physique » du modèle étant conservée. Lorsque le problème ne requiert qu'un nombre limité de sorties, par exemple les fréquences propres du MEF, l'amplitude du déplacement en un nombre réduit de ddls ou encore sa masse, il peut être plus avantageux d'utiliser des métamodèles. De plus, les méthodes de réduction linéaires sont généralement mal adaptées aux structures présentant des non-linéarités contrairement aux métamodèles qui permettent de prédire les réponses de problèmes linéaires ou non-linéaires. Dans les paragraphes suivants sont présentés trois approches couramment utilisées pour la construction de modèles approchés, à savoir la régression polynomiale, le krigeage et les réseaux de neurones. Il existe évidemment d'autres méthodes d'approximation qui ne seront pas abordées dans cette étude. On citera de manière non exhaustive la méthode MARS – *Multivariate Adaptive Regression Splines* – [59], l'approximation à l'aide de fonctions radiales de base [52, 70], les modèles linéaires généralisés [137], les machines à vecteurs de support vectoriel [200], les arbres de régression [198], *etc.*

### 1.4.1 Surfaces de réponse

Le principe des méthodologies de surfaces de réponse est de construire une fonction reliant un paramètre de sortie  $y$  à des paramètres d'entrées indépendants  $x_k$ . Nous nous plaçons ici dans le cas où la réponse  $y$  est obtenue à partir d'une simulation. Elle peut donc être considérée comme une expérience déterministe sans erreur de mesure.

Si  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n_p}]^T \in \mathcal{X}$  est le vecteur des  $n_p$  paramètres d'entrées, la relation exacte entre la réponse  $y$  et les paramètres d'entrées  $\mathbf{x}$  est donnée par

$$y = f(\mathbf{x}). \quad (1.64)$$

Dans le cas où  $y$  est issue de données expérimentales, il convient en général de remplacer  $y = f(\mathbf{x})$  par  $y = f(\mathbf{x}) + \epsilon$ , où  $\epsilon$  représente l'erreur liée à l'expérimentation.

La fonction  $f$  étant en fait inconnue, celle-ci est approchée par une fonction  $\hat{f}$  qui permet d'obtenir la réponse approximée  $\hat{y} = \hat{f}(\mathbf{x})$ . Ainsi, la réponse réelle s'écrit

$$y = \hat{f}(\mathbf{x}) + \epsilon, \quad (1.65)$$

où  $\epsilon$  est l'erreur résiduelle entre la réponse réelle et la réponse approchée. Le but est donc de trouver un modèle mathématique tel que  $\epsilon$  soit minimale.

La méthode la plus utilisée, car la plus simple à mettre en oeuvre, consiste à utiliser un polynôme pour  $\hat{f}(\mathbf{x})$ . Les coefficients de ce polynôme sont alors estimés à partir de la méthode des moindres carrés. Pour un modèle quadratique, l'équation (1.65) devient

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^{n_p} \beta_i x_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n_p} \beta_{ij} x_i x_j + \epsilon. \quad (1.66)$$

Les coefficients  $\beta_i$  et  $\beta_{ij}$  sont déterminés après avoir évalué la réponse  $y$  en différents points de l'espace  $\mathcal{X}$ . Si  $n_s$  est le nombre de ces évaluations, les couples  $(\mathbf{x}^{(k)}, y^{(k)})$  conduisent à mettre l'équation (1.66) sous la forme matricielle

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.67)$$

avec

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n_s)} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n_\beta} \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon^{(1)} \\ \varepsilon^{(2)} \\ \vdots \\ \varepsilon^{(n_s)} \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

et

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_{n_p}^{(1)} & (x_1^{(1)})^2 & x_1^{(1)}x_2^{(1)} & \cdots & x_1^{(1)}x_{n_p}^{(1)} & (x_2^{(1)})^2 & x_2^{(1)}x_3^{(1)} & \cdots & (x_{n_p}^{(1)})^2 \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_{n_p}^{(2)} & (x_1^{(2)})^2 & x_1^{(2)}x_2^{(2)} & \cdots & x_1^{(2)}x_{n_p}^{(2)} & (x_2^{(2)})^2 & x_2^{(2)}x_3^{(2)} & \cdots & (x_{n_p}^{(2)})^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_1^{(n_s)} & x_2^{(n_s)} & \cdots & x_{n_p}^{(n_s)} & (x_1^{(n_s)})^2 & x_1^{(n_s)}x_2^{(n_s)} & \cdots & x_1^{(n_s)}x_{n_p}^{(n_s)} & (x_2^{(n_s)})^2 & x_2^{(n_s)}x_3^{(n_s)} & \cdots & (x_{n_p}^{(n_s)})^2 \end{bmatrix}. \quad (1.69)$$

Dans la méthode des moindres carrés ordinaires, on considère que le vecteur des erreurs  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est de moyenne nulle et que la variance des erreurs est constante. Les erreurs sont alors dites homoscédastiques. La matrice de covariance des erreurs  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$  est  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \sigma^2 \mathbf{I}_{n_s n_s}$ , où  $\sigma^2$  est la variance inconnue *a priori*. Les  $n_\beta = (n_p + 1)(n_p + 2)/2$  coefficients de régression constituant  $\boldsymbol{\beta}$  sont alors estimés de manière à minimiser  $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$ . À condition que  $n_s \geq n_\beta$  et que la matrice  $\mathbf{X}$  soit de rang maximum, l'estimateur des moindres carrés ordinaires  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  de  $\boldsymbol{\beta}$  est obtenu par

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}. \quad (1.70)$$

Le vecteur  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  contient donc les coefficients du polynôme qui sera utilisé comme surface de réponse. L'étude des résidus  $\boldsymbol{\varepsilon}_r = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$  permet ensuite de juger si le modèle ainsi construit décrit correctement la réponse étudiée.

Si l'hypothèse d'erreurs non-corrélées et de variance uniforme s'avère peu réaliste, il est possible d'utiliser la méthode des moindres carrés pondérés. On suppose alors que  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \sigma^2 \mathbf{W}$ , où  $\mathbf{W}$  est une matrice non-singulière de pondération connue. Dans ce cas, le vecteur des coefficients de régression est obtenu par

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{y}. \quad (1.71)$$

La matrice  $\mathbf{W}$  est en général l'inverse de la matrice de covariance des réponses  $\mathbf{y}$ , complète ou restreinte à sa diagonale.

Les  $n_s$  échantillons de l'espace  $\mathcal{X}$  sont communément obtenus à partir d'un plan d'expérience. Le propos de ces plans d'expérience est d'éviter des évaluations inutiles à la construction du modèle et ainsi diminuer les temps de calcul. Les variables sont au préalable normalisées ou codées pour appartenir par exemple à l'intervalle  $[-1; 1]$ , puis suivant l'approche, un plan d'expérience complet ou partiel à plusieurs niveaux est construit.

Pour plus de détails sur la méthodologie des surfaces de réponse on pourra se référer à l'ouvrage de Myers et Montgomery [151].

### 1.4.2 Le krigeage

Le krigeage est une méthode issue de la géostatistique destinée à l'origine à l'interpolation spatiale [135]. Dans la démarche adoptée par Sacks *et al.* [171], la réponse  $y$  simulée grâce au MEF est considérée comme la combinaison d'un modèle de régression et d'un processus stochastique  $\xi$  ayant une structure connue de corrélation entre les observations [179]. Le modèle de krigeage de  $y$  s'écrit alors

$$y = \mu(\mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x}). \quad (1.72)$$

Le terme  $\mu(\mathbf{x})$  représente une approximation globale de  $f(\mathbf{x})$  alors que  $\xi(\mathbf{x})$  crée des déviations locales permettant d'interpoler les échantillons de l'espace  $\mathcal{X}$  considérés.

Les trois types de krigeage les plus utilisés sont [7] :

- le krigeage simple où  $\mu(\mathbf{x}) = m$  est une constante connue ;
- le krigeage ordinaire où  $\mu(\mathbf{x}) = \beta_0$  est une constante inconnue ;
- le krigeage universel où  $\mu(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n_\beta} f_i(\mathbf{x}) \beta_i$  est une combinaison linéaire des  $n_\beta + 1$  fonctions  $f_i(\mathbf{x})$  constituant la base de régression.

Dans le cas du krigeage universel, l'équation (1.72) se met sous la forme [89]

$$y = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + \xi(\mathbf{x}), \quad (1.73)$$

avec  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_0(\mathbf{x}) \cdots f_{n_\beta}(\mathbf{x})]^T$  et  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x}) = [\beta_0 \cdots \beta_{n_\beta}]^T$ .

Le processus  $\xi(\mathbf{x})$  est classiquement considéré comme gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance  $\Sigma(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \sigma^2 r(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$ , où  $\mathbf{x}^{(i)}$  et  $\mathbf{x}^{(j)}$  sont deux points de l'espace  $\mathcal{X}$ ,  $\sigma^2$  est la variance du processus et  $r(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$  la fonction de corrélation.

Comme pour les surfaces de réponses, l'espace  $\mathcal{X}$  est échantillonné en  $n_s$  points  $\mathbf{x}^{(k)}$  correspondant aux réponses  $y^{(k)}$  regroupées dans le vecteur  $\mathbf{y}$  défini comme dans l'équation (1.68). De plus, le vecteur  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  est évalué en chacun de ces points pour former la matrice  $\mathbf{F} = [\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(1)}) \cdots \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(n_s)})]$ . La matrice de corrélation  $\mathbf{R}$  de  $\xi(\mathbf{x})$  s'écrit

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(1)}) & \cdots & r(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(n_s)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r(\mathbf{x}^{(n_s)}, \mathbf{x}^{(1)}) & \cdots & r(\mathbf{x}^{(n_s)}, \mathbf{x}^{(n_s)}) \end{bmatrix}. \quad (1.74)$$

Il reste à choisir une fonction de corrélation aussi appelée covariogramme. Parmi les différents choix possibles [171], le modèle de type gaussien est le plus employé. Il s'exprime par

$$r(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = \exp \left( - \sum_{k=1}^{n_p} \theta_k \left| \mathbf{x}_k^{(i)} - \mathbf{x}_k^{(j)} \right|^2 \right). \quad (1.75)$$

Les paramètres  $\theta_k > 0$  sont remplacés par les estimateurs du maximum de vraisemblance obtenus à partir de la minimisation sans contraintes par rapport aux  $\theta_k$  de

$$\frac{1}{2} (n_s \ln(\hat{\sigma}^2) + \ln(|\mathbf{R}|)), \quad (1.76)$$

avec  $\hat{\sigma}^2$  l'estimation de  $\sigma^2$  obtenue par

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n_s} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}). \quad (1.77)$$

L'estimation  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  de  $\boldsymbol{\beta}$  est calculée suivant

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y}. \quad (1.78)$$

Une fois les  $\theta_k$  déterminés, la réponse approchée  $\hat{y}$  de  $y$  en un point  $\mathbf{x}$  non échantillonné est

$$\hat{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad (1.79)$$

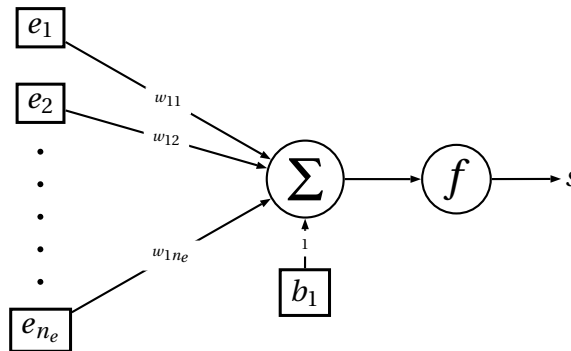
avec le vecteur de corrélation

$$\mathbf{r}^T(\mathbf{x}) = \left[ r(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(1)}) \quad \dots \quad r(\mathbf{x}, \mathbf{x}^{(n_s)}) \right]^T. \quad (1.80)$$

En fait, le terme  $\mathbf{r}^T(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\beta}})$  de équation (1.79) est l'interpolation des résidus du modèle de régression  $\mathbf{f}(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}}$  [89].

Le département d'informatique de l'université technique du Danemark propose une *tool-box* libre permettant l'utilisation de cette méthode avec le logiciel Matlab<sup>®</sup> [123, 136].

### 1.4.3 Les réseaux de neurones



**Fig. 1.1** – Représentation d'un neurone

La majorité de ce qui va être présenté dans ce paragraphe se base sur [50] et [158]. L'approche par réseaux de neurones est une méthode très populaire s'inspirant des neurones biologiques [138]. Un réseau de neurones est constitué de processus élémentaires appelés neurones. Comme défini dans [50], chaque neurone est une fonction algébrique non-linéaire, paramétrée, à valeurs bornées. La figure 1.1 montre la représentation classique d'un neurone. Ce neurone réalise une somme pondérée de ses entrées plus un biais  $b_1$  suivie d'une transformation par une fonction d'activation  $f$ . On note  $\mathbf{e} = [e_1 \dots e_{n_e}]^T$  le vecteur des  $n_e$  variables d'entrées,  $s$  la sortie du neurone,  $\mathbf{w} = [w_{11} \dots w_{1n_e}]^T$  le vecteur des poids du neurones – aussi appelés poids synaptiques.  $w_{1j}$  est le poids qui relie la  $j^e$  entrée à l'unique neurone. La fonction d'activation  $f$  est classiquement une fonction seuil ou une fonction linéaire pour des problèmes linéaires et une fonction à forme sigmoïde pour les autres cas.

En utilisant la fonction tangente hyperbolique, version symétrique de la fonction sigmoïde, la relation entre les entrées et la sortie d'un neurone s'écrit

$$s = f(v_1) = \tanh \left( b + \sum_{k=1}^{n_e} w_{1k} e_k \right) = \tanh (b_1 + \mathbf{w}^T \mathbf{e}), \quad (1.81)$$

où  $v_1 = b_1 + \mathbf{w}^T \mathbf{e}$  est le « potentiel » du neurone. Le biais  $b_1$  permet un décalage horizontal de la fonction d'activation.

Il est aussi possible d'envisager de mettre tous les poids à 1, d'annuler le biais et d'utiliser une fonction d'activation paramétrée. C'est le cas lorsque l'on utilise les fonctions radiales de base – en anglais *Radial Basis Functions*, RBF – [79, 144]. Bien que différentes classes de fonctions radiales existent, on donnera seulement en exemple le modèle gaussien qui conduit à la relation

$$s = \exp \left( -\frac{1}{2} \frac{\sum_{k=1}^{n_e} (e_k - \mu_k)^2}{\sigma^2} \right). \quad (1.82)$$

Les paramètres du réseau sont alors les coordonnées  $\mu_k$  du centre de la gaussienne et  $\sigma$  son écart-type. Ce type de neurone est utilisé dans les réseaux RBF que nous ne traiterons pas ici.

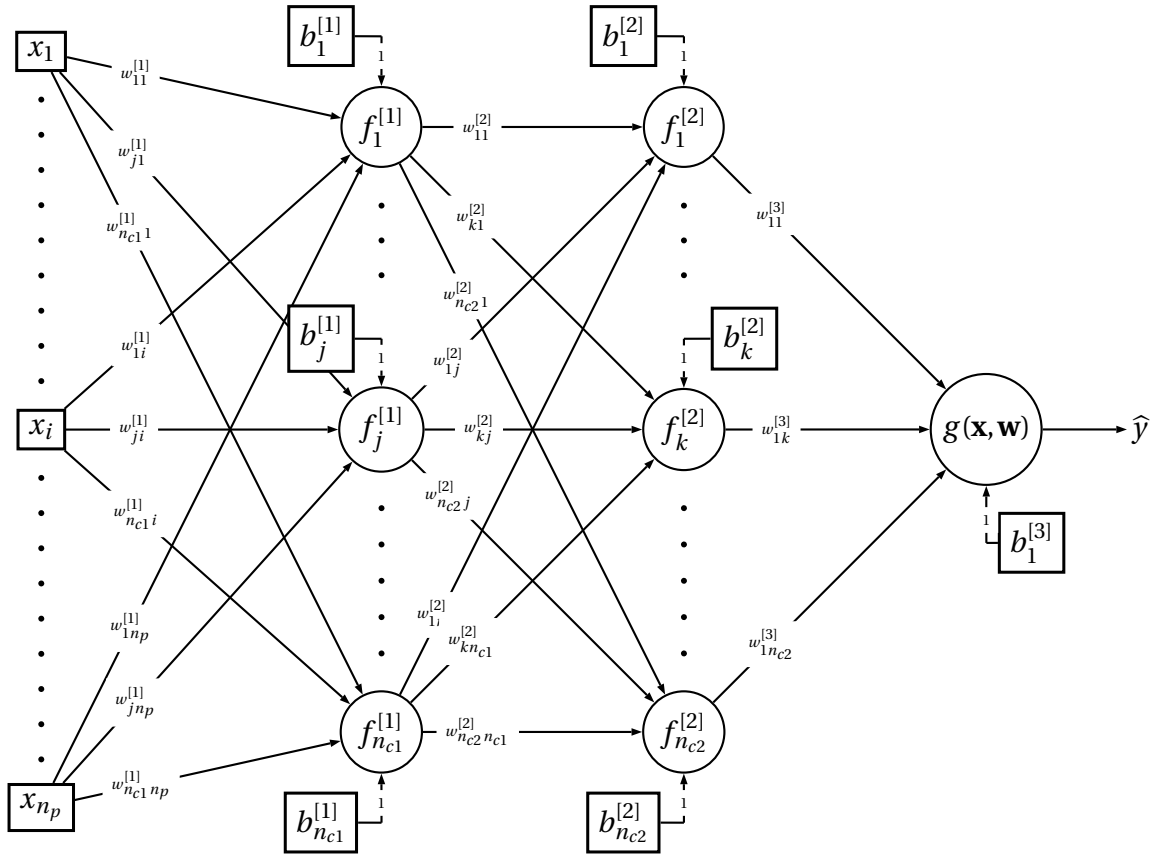
La manière dont les neurones sont connectés entre eux détermine l'architecture du réseau de neurones. Le choix de celle-ci dépend de l'application. On distingue deux types de réseaux de neurones : les réseaux bouclés et les réseaux non bouclés [50]. Les réseaux bouclés ou récurrents possèdent un graphe de connexion cyclique où le temps est explicitement pris en considération. Dans le deuxième type, les neurones sont assemblés de sorte à ce que le graphe de connexion ne comporte aucun cycle, l'information se propageant uniquement des entrées vers les sorties. Parmi les topologies les plus utilisées, on trouve les perceptrons multi-couches – PMC. Il s'agit de réseaux non-bouclés à couches. Un exemple d'architecture d'un PMC à trois couches est présenté figure 1.2. On remarque que chaque couche de neurones est totalement connectée à la couche suivante. Les  $n_p$  paramètres  $x_k \in \mathcal{X}$  sont reliés à la première couche qui est elle même connectée à la deuxième couche. Ces deux premières couches, possédant respectivement  $n_{c1}$  et  $n_{c2}$  neurones, sont appelées couches cachées car les sorties de celles-ci ne sont pas visibles à l'extérieur du réseau, on ne peut donc pas juger si leurs sorties sont adéquates. Les couches cachées possèdent des fonctions d'activation non-linéaires. En effet, l'emploi de fonctions d'activation linéaires s'avèrent inutile puisque la combinaison de plusieurs couches à fonctions d'activation linéaires peut toujours se ramener à une seule couche linéaire équivalente. La dernière couche cachée est reliée à la dernière couche du neurone, appelée couche de sortie qui possède ici un seul neurone de fonction d'activation linéaire. Dans d'autres problèmes, cette couche de sortie pourrait très bien comporter plusieurs neurones à fonctions d'activation linéaires ou non-linéaires. Dans le cadre d'approximation de réponse, il est préférable d'utiliser en sortie des fonctions d'activation linéaires de manière à ne pas borner la valeur de la sortie du réseau. Si la fonction tangente hyperbolique est utilisée comme fonction d'activation, la réponse approchée  $\hat{y}$  produite par ce réseau est donnée par la relation non-linéaire

$$\hat{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = b_1^{[3]} + \sum_{k=1}^{n_{c2}} w_{1k}^{[3]} f_k^{[2]}, \quad (1.83)$$

avec

$$\begin{aligned} f_k^{(2)} &= \tanh\left(b_k^{[2]} + \sum_{j=1}^{n_{c1}} w_{kj}^{[2]} f_j^{[1]}\right), \\ f_j^{(1)} &= \tanh\left(b_j^{[1]} + \sum_{i=1}^{n_p} w_{ji}^{[1]} x_i\right), \end{aligned} \quad (1.84)$$

et  $\mathbf{p}$  le vecteur de l'ensemble des  $n_{pr}$  paramètres du réseau constitué par tous les poids et biais du réseau.



**Fig. 1.2** – Architecture d'un PMC à deux couches cachées et un neurone de sortie linéaire

La détermination des paramètres du réseau a lieu lors d'une phase dite d'apprentissage ou d'entraînement. Dans le cas du PMC, cet apprentissage est supervisé, c'est-à-dire que le réseau est forcé à converger vers un état final connu *a priori*. Nous nous plaçons dans le cas général où aux paramètres  $\mathbf{x}$  correspondent non pas une réponse unique  $y$  mais  $n_y$  réponses regroupées dans le vecteur  $\mathbf{y}$ . La première étape est la constitution d'une base d'apprentissage constituée de couples entrée-sortie  $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)})$  résultants de la simulation du vecteur des réponses  $\mathbf{y}$  en  $n_s$  points de  $\mathcal{X}$ . Les paramètres du réseau – ici les poids et les biais regroupés dans le vecteur  $\mathbf{p}$  – sont obtenus par la minimisation d'une fonction coût représentative de l'écart entre les réponses simulées  $\mathbf{y}^{(i)}$  et les réponses  $\hat{\mathbf{y}}^{(i)}$  issues du réseau à partir de  $\mathbf{x}^{(i)}$ . On parle alors d'apprentissage par correction de l'erreur. La fonction coût représentant la



performance du réseau est en général l'erreur quadratique moyenne

$$F(\mathbf{p}) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \right)^T \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}, \quad (1.85)$$

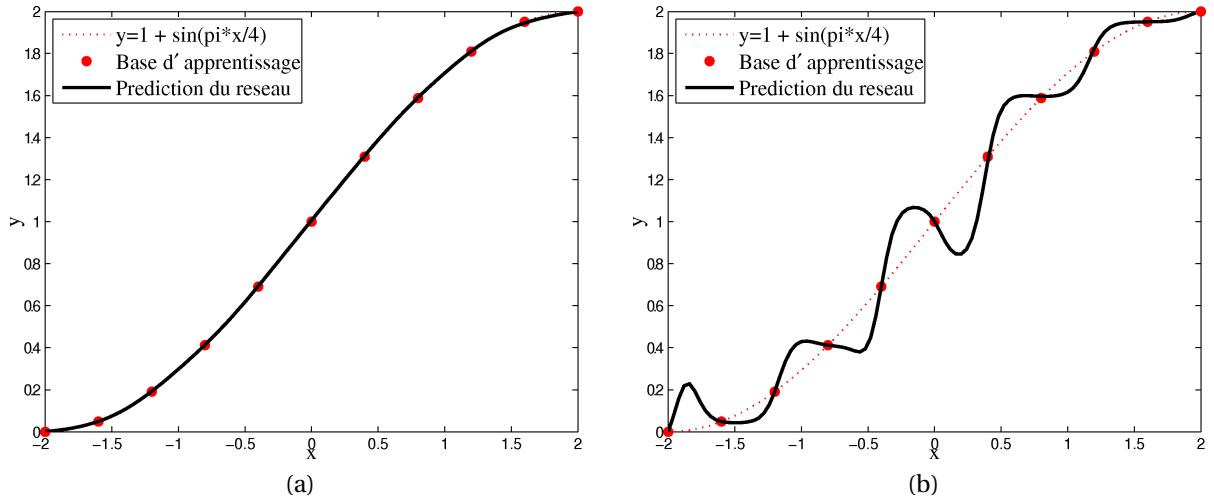
avec l'erreur

$$\boldsymbol{\epsilon}^{(i)} = \mathbf{y}^{(i)} - \hat{\mathbf{y}}^{(i)}. \quad (1.86)$$

Lorsque la minimisation de cette fonction coût tient compte simultanément de tous les couples de la base d'apprentissage, on parle d'apprentissage non-adaptatif ou par groupage – *batch training*. Lorsque les paramètres sont modifiés en fonction de la minimisation de la fonction  $J^i(\mathbf{p}) = \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(i)} \right)^T \boldsymbol{\epsilon}^{(i)}$  associée à chaque couple  $i$ , on parle d'apprentissage adaptatif – *on-line training*. Cette dernière technique est utilisée lorsque l'on souhaite réaliser l'apprentissage au fur et à mesure de la disponibilité des échantillons.

Nous nous plaçons ici dans le cas d'un apprentissage par groupage. La minimisation de la fonction coût est réalisée en modifiant les paramètres en fonction du gradient de cette fonction. Une manière économique d'évaluer ce gradient est d'utiliser la technique dite de rétropropagation du gradient de l'erreur. Partant de la dernière couche, les sensibilités de la fonction coût par rapport aux potentiels des neurones sont calculées récursivement à travers les couches du réseau jusqu'à la première couche. Quant à la technique de minimisation à choisir parmi la pléthore d'algorithmes existants, il est conseillé de ne pas utiliser la méthode du gradient simple et ses variantes car celles-ci convergent trop lentement pour la plupart des problèmes. On préférera plutôt des méthodes du second ordre dérivées de la méthode de Newton telles que la méthode du gradient conjugué, l'algorithme BFGS [29] ou encore l'algorithme de Levenberg-Marquardt [114]. Ce dernier s'avère particulièrement rapide mais reste limité à des réseaux ne possédant pas plus de quelques centaines de paramètres. En effet, cette méthode nécessite des inversions de matrices dont les tailles croissent avec la complexité du réseau. Des précisions sur la rétropropagation du gradient et l'algorithme de Levenberg-Marquardt sont fournies en annexe B.

Le critère d'arrêt principal du processus d'apprentissage est en général une borne inférieure sur la fonction à minimiser. Comme dans tout problème d'optimisation, il est aussi important d'utiliser un critère d'arrêt secondaire en imposant par exemple un nombre maximal de périodes d'entraînement. Ce second critère permet ainsi de stopper l'algorithme en cas de non-convergence. Cependant, la satisfaction du critère choisi ne garantit pas la capacité de généralisation du réseau de neurones obtenu, c'est-à-dire sa capacité à prédire des réponses autres que celles utilisées dans la base d'apprentissage. En effet, l'erreur quadratique peut être faible si elle est calculée sur l'ensemble d'apprentissage mais élevée si elle est calculée sur des nouvelles données. Ce phénomène dit de « surajustement » apparaît en général lorsque le nombre de couches et de neurones cachés est trop important par rapport aux nombres de données disponibles pour l'apprentissage. Les figures 1.3a et 1.3b montrent l'approximation de la fonction en pointillés avec deux architectures neuronales. Dans les deux cas, l'erreur quadratique est faible sur les réponses de la base d'apprentissage représentées pour les points épais. Seul le réseau de la figure 1.3a est pourtant capable de prédire correctement des sorties en dehors de la base d'apprentissage. Ce réseau généralise bien alors que l'autre non.



**Fig. 1.3** – Illustration du phénomène de surajustement : (a) réseau généralisant bien, (b) réseau généralisant mal

Pour se prévenir du surajustement, on pourra utiliser les techniques suivantes :

1. une procédure de validation croisée où les données disponibles sont divisées en trois sous-ensembles distincts : la base d'apprentissage, la base de validation et la base de test – dans des proportions conseillées de 50 – 20 – 30 % respectivement. La figure 1.4 illustre cette procédure. Au cours de l'apprentissage, le critère d'erreur est calculé sur la base d'apprentissage – erreur d'apprentissage – et sur la base de validation – erreur de validation. Lorsque l'erreur de validation cesse de s'améliorer pendant plusieurs périodes d'entraînement, l'apprentissage est stoppé, les paramètres du réseau retenus étant ceux associés à la période où l'erreur de validation est minimale. La base de test est utilisée pour la comparaison de réseaux ayant différentes architectures ;
2. une méthode de régularisation où la fonction à minimiser n'est plus l'erreur quadratique moyenne mais

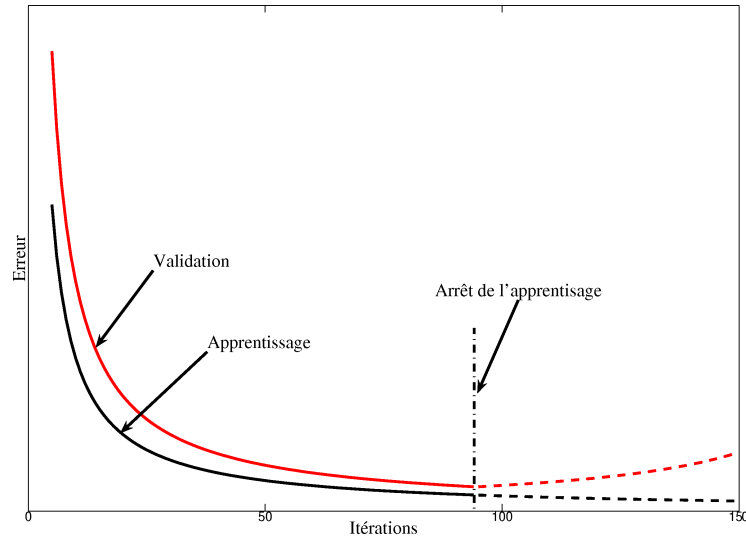
$$F(\mathbf{p}) = \gamma \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \left( \mathbf{e}^{(i)} \right)^T \mathbf{e}^{(i)} + (1 - \gamma) \frac{1}{n_{pr}} \sum_{j=1}^{n_{pr}} p_j^2, \quad (1.87)$$

où  $p_j$  représente l'un des  $n_{pr}$  paramètres du réseau – poids ou biais – et  $\gamma$  le paramètre de régularisation. Le second terme de l'équation (1.87) permet de diminuer la valeur des paramètres et d'obtenir une réponse du réseau plus lisse et moins surajustée.

On notera toutefois que si le nombre  $n_s$  d'échantillons de la base d'apprentissage est très supérieur aux nombres de paramètres du réseau – dix fois plus semble être la règle heuristique communément appliquée [158] – alors le risque de surajustement est très faible. Cependant, suivant la taille du MEF dont on veut approximer les réponses, le temps de calcul de la constitution des données nécessaires à l'apprentissage peut être plus ou moins long. Lorsque l'on dispose seulement d'un nombre réduit d'échantillons, le ré-échantillonnage par *bootstrapping* peut être couplé avec la procédure de validation croisée [50]. Dans l'algorithme utilisé, les données disponibles sont ré-échantillonnées  $B$  fois par la technique du *bootstrap* [53],  $B$  apprentissages sont effectués sur les données obtenues, les erreurs d'apprentissage et de validation sont analysées pour choisir un nombre de périodes d'entraînement optimal  $N_c^{\text{opt}}$  et un apprentissage est ensuite effectué sur l'ensemble des données pour

$N_c^{\text{opt}}$  périodes d'entraînement.

La méthode de régularisation introduit un paramètre  $\gamma$  auquel il faut donner une valeur. Comme il est difficile *a priori* de déterminer la valeur optimale de  $\gamma$ , MacKay [126] et Forese et Hagan [58] proposent une technique de régularisation automatique basée sur une approche bayésienne. Cette approche est détaillée en annexe B.



**Fig. 1.4** – Illustration de la validation croisée

Lorsque les réseaux de neurones sont utilisés dans le cadre de la fouille de données, on emploie un apprentissage non supervisé où contrairement à l'apprentissage supervisé l'état final n'est pas connu *a priori*. Une application importante est la construction des cartes auto-organisatrices de Kohonen [102] permettant l'analyse et la visualisation en faibles dimensions de données multidimensionnelles.

Lors de la création d'un PMC, se posent les questions suivantes : combien de couches cachées, combien de neurones par couche, quelles fonctions d'activation faut-il choisir ? La réponse n'est pas simple et dépend évidemment du problème étudié. Néanmoins, il a été montré qu'il est possible d'approcher avec une précision arbitraire n'importe quelle fonction avec un PMC constitué d'une seule couche cachée de neurones à fonctions d'activation de type sigmoïdes et d'une couche de sortie de neurones à fonctions d'activation linéaires, à condition de disposer suffisamment de neurones sur la couche cachée [76]. Dans la pratique, deux voire trois couches cachées sont utilisées. Plus le réseau possède de neurones plus le nombre de paramètres à estimer est important. Si le nombre d'échantillons disponibles pour l'apprentissage est faible alors le phénomène de surajustement évoqué précédemment risque de survenir facilement. Le modèle doit être construit de manière à comporter le moins de paramètres, à être « parcimonieux ».

Nous finirons cette description des réseaux de neurones par quelques mots sur le pré-traitement des données et l'initialisation des poids et biais au début de l'algorithme d'apprentissage. Les paramètres d'entrée pouvant posséder des unités différentes, il est indispensable de normaliser les entrées avant le début de l'apprentissage pour leur permettre d'avoir une importance égale pendant l'apprentissage. En ce qui concerne les sorties, il apparaît que les algorithmes d'apprentissage donnent de meilleurs résultats lorsque celles-ci

sont aussi normalisées. Il faut alors noter que la fonction coût de l'apprentissage est calculée sur des sorties normalisées. Pour l'initialisation des paramètres du réseau, la méthode de Nguyen-Widrow [153] est une possibilité.

Dans les approximations par réseaux de neurones réalisées dans cette étude, nous avons créé les PMC avec les programmes Matlab<sup>®</sup> de la *Neural Network Toolbox* [136]. Le nombre de couches cachées et le nombre de neurones sont choisis en fonction de la quantité de données utilisés pour l'apprentissage. Ces données sont obtenues par un échantillonnage hypercubes latins [82, 140]. Si des bases de validation et de test sont utilisées, celles-ci proviennent d'échantillonnages indépendants. La fonction d'activation utilisée pour les neurones cachés est la fonction tangente hyperbolique. Pour minimiser le nombre de paramètres, les réseaux possèdent un seul neurone en couche de sortie de fonction d'activation linéaire. L'utilisation de la régularisation bayésienne associée à l'algorithme de Levenberg-Marquardt permet de trouver les poids et biais optimum du réseau tout en évitant le surajustement.

#### 1.4.4 Choix d'une méthode d'approximation

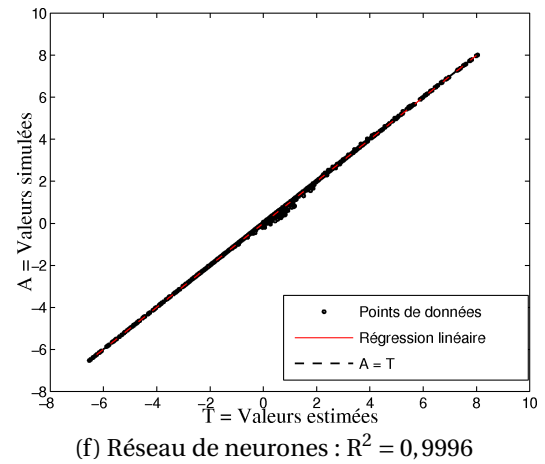
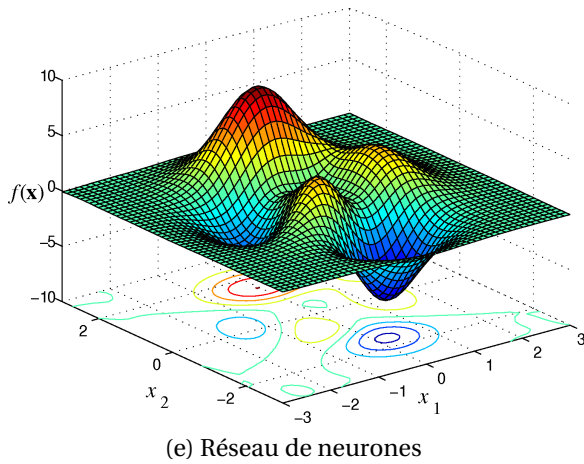
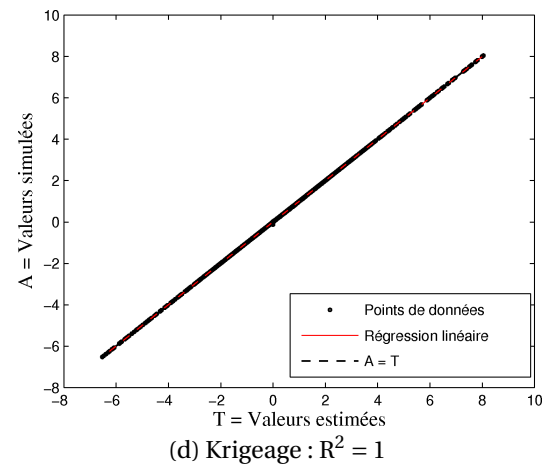
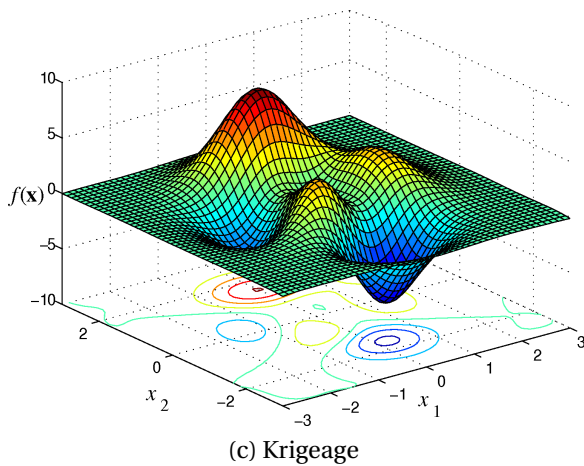
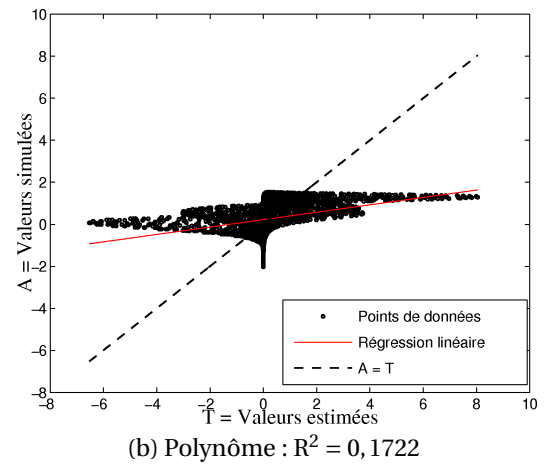
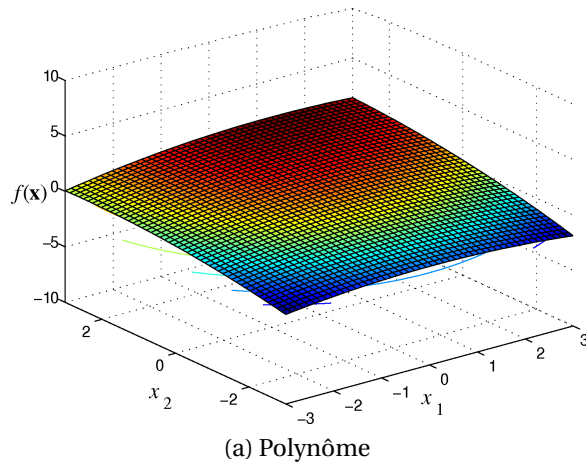
Nous avons présenté dans les sections précédentes trois grandes classes de méthodes utilisées pour la construction de métamodèles. Dans ce paragraphe, nous comparons la performance de ces méthodes pour une fonction non-régulière à deux variables puis sur les réponses d'un MEF de rotor.

Pour une première comparaison, nous utilisons la fonction « *peaks* » de Matlab [136]

$$f(\mathbf{x}) = 3(1 - x_1)^2 \exp(-x_1^2 - (1 + x_2)^2) - 10\left(\frac{x_1}{5} - x_1^3 - x_2^5\right) \exp(-x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{3} \exp(-(1 + x_1)^2 - x_2^2). \quad (1.88)$$

500 échantillons des deux variables  $x_1$  et  $x_2$  sont obtenus par un échantillonnage hypercubes latins uniforme sur l'intervalle  $[-3 ; 3]$  et les réponses correspondantes sont calculées afin de constituer la base d'apprentissage. Après construction du métamodèle, la performance est évaluée sur une base test de 2 500 valeurs simulées résultant du maillage régulier  $50 \times 50$  du domaine d'étude.

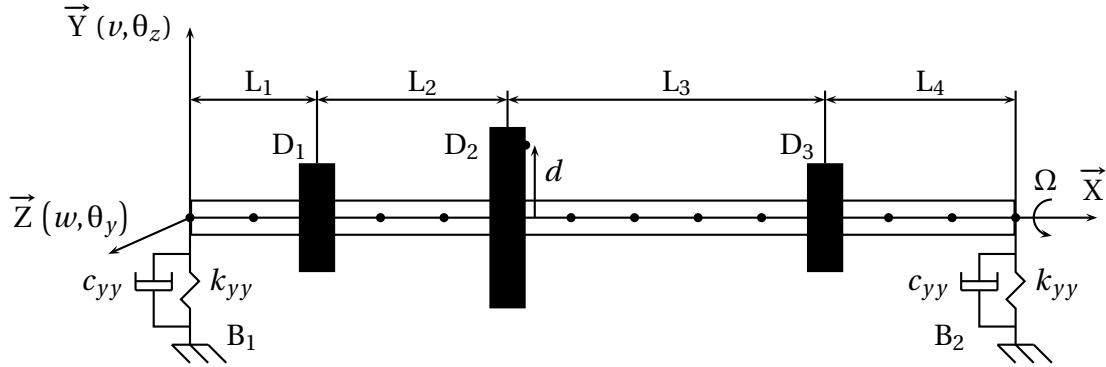
Les résultats obtenus pour les trois méthodes sont présentés figure 1.5. La sous-figure 1.5a est la surface de réponse tracée sur les points de la base test avec un modèle quadratique tel que celui de l'équation (1.66). La figure 1.5b est le diagramme de dispersion entre les réponses simulées de la base test et les réponses estimées par le modèle quadratique. La droite de régression linéaire sur ces données apparaît en trait rouge continu. Les autres sous-figures correspondent au cas des modèles krigeage et réseau de neurones. Le krigeage est universel avec la fonction de corrélation gaussienne 1.75. Le réseau de neurones possède deux couches cachées de cinq neurones et a été entraîné avec la régularisation bayésienne. Il est évident que pour une fonction aussi irrégulière, l'approche polynomiale n'est pas adaptée. Le critère  $R^2$  calculé entre les valeurs simulées test et leurs estimées est de 0,1722. Ce critère dont la définition est donnée en annexe A, vaut 1 lorsque la prédiction est parfaite. Le résultat n'est que très faiblement amélioré avec l'emploi de modèles à l'ordre trois ou quatre. En comparaison, le modèle krigeage donne une valeur parfaite de 1 et le réseau de neurones donne une valeur elle aussi remarquable de 0,9996.



**Fig. 1.5** – Comparaison de la performance de différentes méthodes d'approximation sur une fonction non-régulière

Il ressort de cet exemple que le krigage et les réseaux de neurones sont de très bons outils de prédiction de réponses fortement non-linéaires. Cependant, les calculs associés s'avèrent plus lourds que pour une simple approche par régression polynomiale, il est légitime de se demander si la construction de ces modèles est toujours nécessaire. Pour une réponse faiblement non-linéaire, un modèle polynomial donne sûrement des résultats similaires pour un temps de construction moindre. Lorsque le problème possède deux paramètres, il est aisé d'évaluer la complexité de la réponse en examinant des figures telles que 1.5a, 1.5c et

1.5e construites en un nombre suffisant de points de l'espace. Pour des problèmes de dimension supérieure, cette visualisation n'est plus possible, une évaluation de la régularité peut éventuellement être faite par des calculs de gradient sur différents points de l'espace mais cela n'est en général pas réalisable simplement. Pour un problème à  $n_p$  paramètres, il est plus facile d'en fixer  $(n_p - 2)$ , de calculer les réponses correspondant aux variations des deux paramètres restants, de tracer la représentation 3-D et de répéter le processus pour les différents couples possibles. Nous appliquerons cette technique avant l'approximation de différents types de réponses de la structure représentée figure 1.6.



**Fig. 1.6** – Modèle du rotor

La structure considérée est un rotor simplifié tiré de l'ouvrage [108]. Ce rotor est modélisé par un arbre, trois disques  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  et deux paliers  $B_1$ ,  $B_2$ . L'arbre d'axe suivant  $\vec{X}$  est discrétisé en treize éléments finis poutre identiques, en flexion dans les plans  $(XY)$  et  $(XZ)$ . Les trois disques sont modélisés par des masses et inerties localisées aux noeuds 3, 6 et 11. Des éléments ressorts linéaires et amortisseurs visqueux modélisent, dans les deux plans de flexion, les paliers  $B_1$  et  $B_2$  supposés identiques. Ces éléments sont localisés entre le noeud 1 et le repère fixe pour  $B_1$  et entre le noeud 14 et le repère fixe pour  $B_2$ . De plus, un balourd de masse  $m_b$  est placé à la distance  $d$  du centre géométrique de l'arbre sur le disque  $D_2$ , dans le plan  $(XY)$ . Chaque noeud  $i$  possédant quatre ddls  $(v, w, \theta_y, \theta_z)$  par noeuds, le modèle éléments finis de ce rotor comporte 56 ddls. Les différents paramètres et leurs valeurs nominales sont reportés tableau 1.1.

Le comportement dynamique du rotor est caractérisé par l'équation du mouvement

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}}(t) + (\mathbf{C}_b + \Omega \mathbf{C}_g)\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1.89)$$

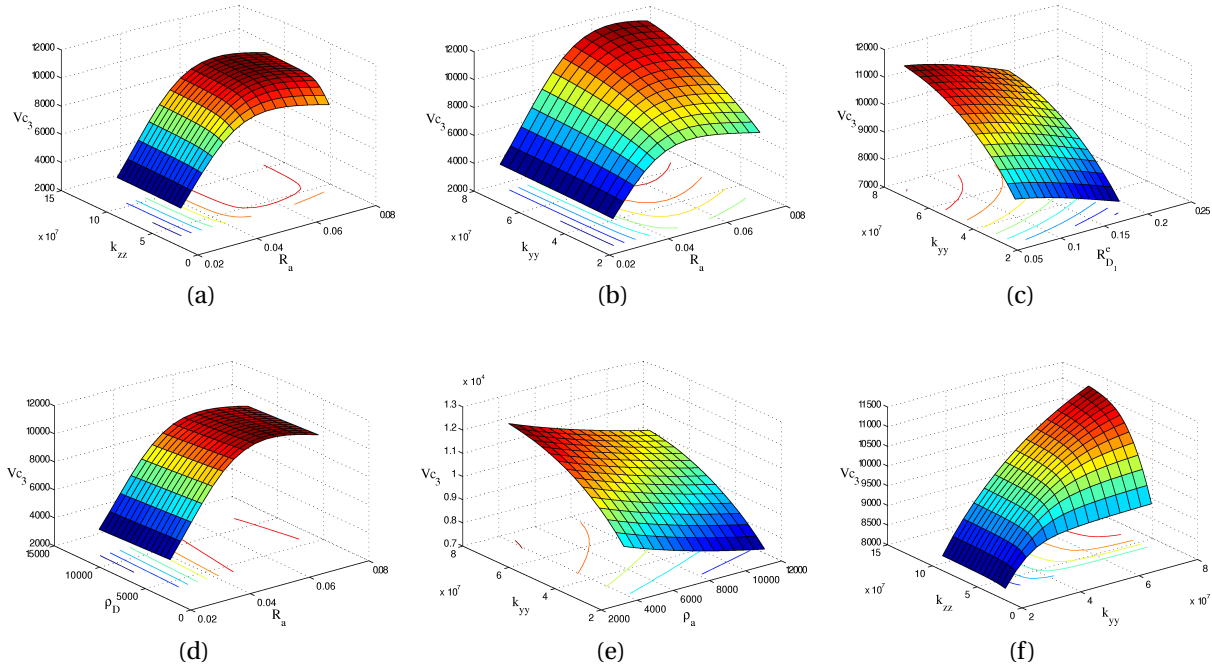
où  $\Omega$  est la vitesse de rotation de l'arbre,  $\mathbf{C}_b$  la matrice d'amortissement symétrique associée aux paliers,  $\mathbf{C}_g$  la matrice gyroscopique antisymétrique et  $\mathbf{f}(t)$  le vecteur des forces générées par le balourd. Ce vecteur a pour seules composantes non-nulles les deux ddls  $v$  et  $w$  du noeud 6 de valeur  $-m_b d \Omega^2 [\sin(\Omega t) \cos(\Omega t)]^T$ .

Neuf paramètres sont considérés comme incertains : le rayon de l'arbre  $R_a$ , les trois rayons extérieurs des disques  $R_{D_1}^e$ ,  $R_{D_2}^e$  et  $R_{D_3}^e$ , les masses volumiques de l'arbre  $\rho_a$  et des disques  $\rho_D$ , le module d'Young de l'arbre  $E_a$ , les raideurs  $k_{yy}$  et  $k_{zz}$  des deux paliers supposés identiques. Les valeurs de ces paramètres varient dans un intervalle compris entre 0,5 fois et 1,5 les valeurs nominales fournies tableau 1.1, soit une variation de  $\pm 50\%$ . Nous nous intéressons à prédire les sept premières vitesses critiques du rotor, les dix premières

**Tab. 1.1** – Valeurs nominales des paramètres de conception

Paramètres	Valeur nominale
Positions des disques (m)	$L_1 = 0,2; L_2 = L_4 = 0,3; L_3 = 0,5$
Épaisseurs des disques (m)	$e_1 = e_2 = 0,05; e_3 = 0,06$
Rayon extérieur arbre (m)	$R_a = 0,05$
Rayons extérieurs des disques (m)	$R_{D_1}^e = 0,12; R_{D_2}^e = R_{D_3}^e = 0,2$
Masse volumique (arbre et disques) ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$\rho_{a,D} = 7\,800$
Module d'Young arbre ( $\text{N.m}^{-2}$ )	$E_a = 2,1 \times 10^{11}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0,3$
Raideurs paliers ( $\text{N.m}^{-1}$ )	$k_{yy} = 5 \times 10^7; k_{zz} = 7 \times 10^7; k_{yz} = k_{zy} = 0$
Amortissements paliers ( $\text{N.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ )	$c_{yy} = 5 \times 10^2; c_{zz} = 7 \times 10^2; c_{yz} = c_{zy} = 0$
Balourd (g.mm)	$m_b d = 200$

fréquences propres du rotor au repos et les dix premières fréquences propres du rotor à une vitesse de rotation de  $5\,000 \text{ tr.min}^{-1}$ . Pour construire les métamodèles, sont calculés 1 000 couples entrées-réponses pour la base d'apprentissage et 600 couples pour la base de test. Deux tirages hypercubes latins uniformes sont réalisés pour obtenir ces données. Comme nous le disions précédemment, il est possible de se donner une idée de la complexité de la réponse en projetant les résultats sur deux paramètres. Pour chaque réponse, il existe trente-six combinaisons possibles. Six des surfaces obtenues pour la troisième vitesse critique sont présentées figure 1.7. Elles montrent que la réponse est assez régulière et devrait donc pouvoir être prédite correctement par un modèle polynomial. Les autres réponses présentent sensiblement le même degré de régularité.



**Fig. 1.7** – Observation de la régularité pour la troisième vitesse critique

Avec les données disponibles, des métamodèles polynomiaux, krigeage et réseaux de neurones sont calculés pour les vingt-sept réponses. Les polynômes sont d'ordre deux, le kri-

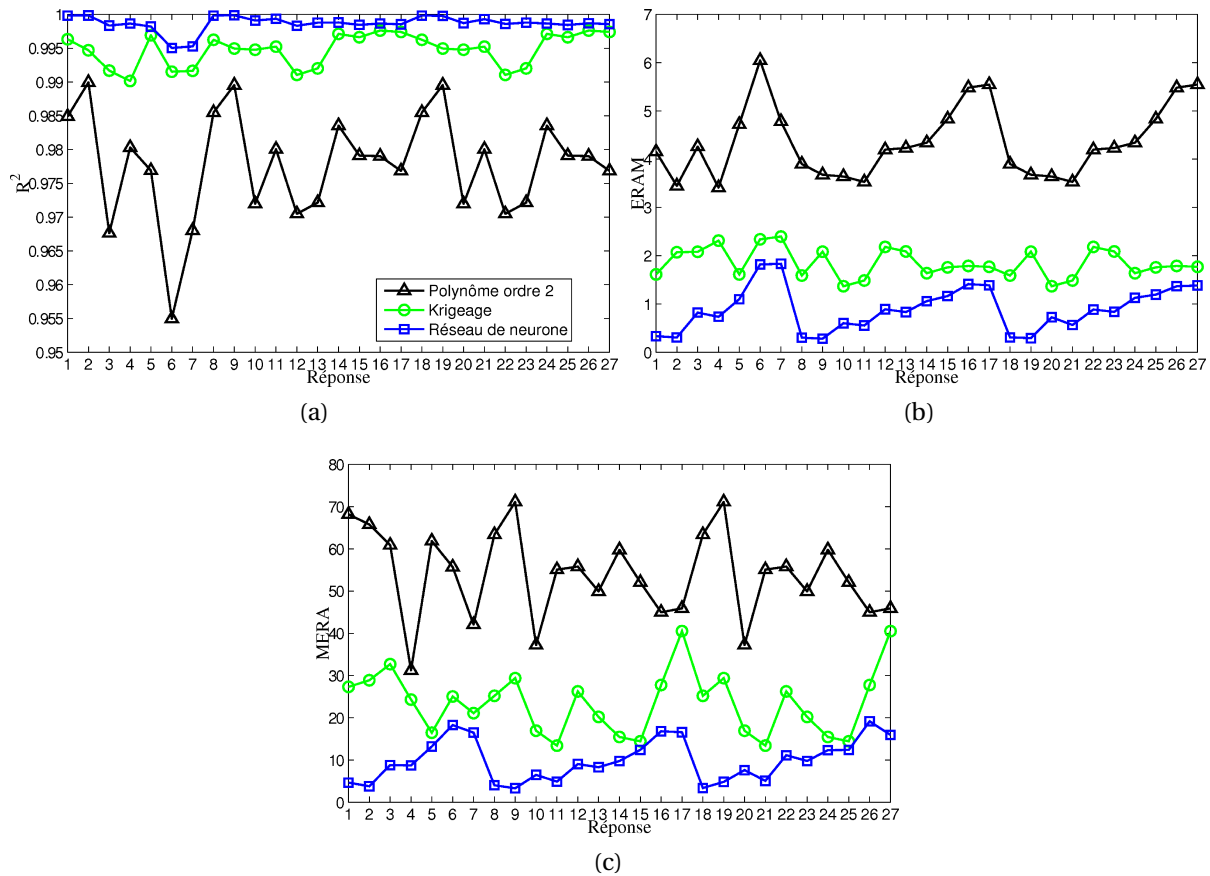
geage est universel avec une fonction de corrélation gaussienne et les réseaux de neurones sont à deux couches cachées de dix neurones. Les figures 1.8a, 1.8b et 1.8c représentent respectivement le critère  $R^2$ , l'erreur relative absolue moyenne ERAM et le maximum de l'erreur relative absolue MERA pour les trois approches. Les deux derniers critères sont définis en annexe A. En ce qui concerne les réseaux de neurones, notons qu'un apprentissage débutant par une initialisation aléatoire des poids et biais du réseau, tout apprentissage effectué avec une même base d'apprentissage mais avec des conditions initiales différentes conduit à une performance qui lui est propre. Ainsi, pour chaque réponse, l'apprentissage du réseau de neurones a été réalisé dix fois. Le réseau donnant l'erreur relative moyenne la plus faible a été retenu.

Sur l'ensemble des réponses et critères évalués, les réseaux de neurones se démarquent des autres méthodes par une meilleure précision, devançant respectivement les modèles krigage et les modèles polynomiaux à l'ordre deux. Pour le critère  $R^2$ , les méthodes krigage et réseau de neurones conduisent à des bonnes valeurs supérieures à 0,99. Les valeurs  $R^2$  des modèles polynomiaux sont elles aussi excellentes mais sensiblement inférieures. Sur l'erreur relative absolue moyenne, les réseaux de neurones sont clairement plus performants puisque les erreurs maximales sont inférieures à 2 % alors que les modèles krigage ont des erreurs situées autour de 2 % et les polynômes entre 3 % et 6 %. Le maximum de l'erreur relative absolue représenté figure 1.8c permet de constater que les métamodèles peuvent conduire à des erreurs importantes dans certaines régions de l'espace bien que les indices  $R^2$  et ERAM soient excellents. Là encore, les réseaux de neurones sont meilleurs que les autres types de métamodèles mais le niveau d'erreur est encore assez important.

La figure 1.9 présente schématiquement le domaine d'application et le temps de création associés aux trois approches étudiés. Les polynômes ont l'avantage d'être calculés assez rapidement mais ont une capacité prédictive diminuant lorsque la complexité de la réponse augmente. La technique du krigage demande plus de calculs puisque la construction du modèle nécessite la détermination des paramètres de la fonction de corrélation par une méthode de minimisation. Cependant, ce type de modèle permet d'estimer des fonctions beaucoup plus irrégulières. Enfin, les réseaux de neurones ont l'inconvénient de nécessiter un temps d'apprentissage et du « tâtonnement » lors du choix du nombre de couches et de neurones, mais s'adaptent à beaucoup plus de situations que les deux autres approches. Des revues et comparaisons plus exhaustives sur les métamodèles pourront être trouvées dans [84, 187].

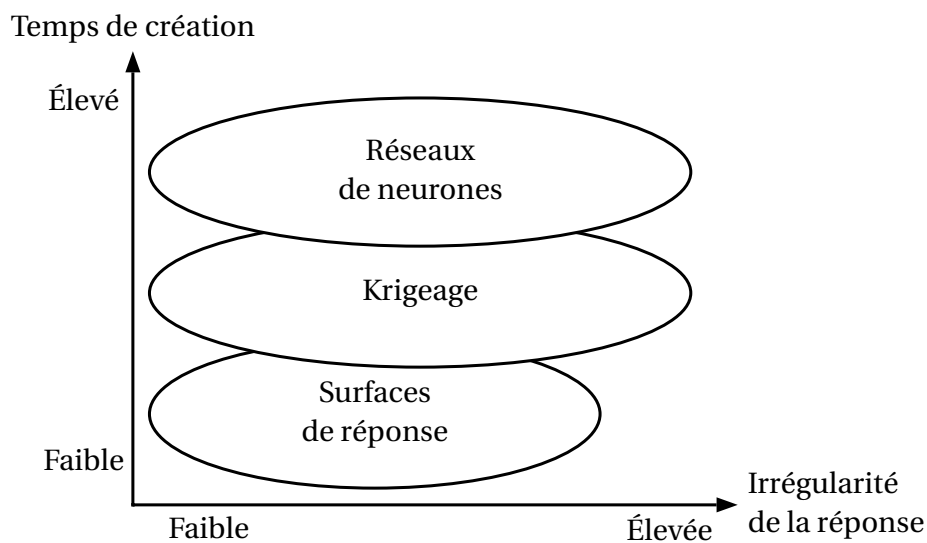
Étant donnée la simplicité du calcul d'un modèle polynomial, celui-ci devrait toujours être calculé en premier avant de se lancer dans le calcul de modèles plus complexes. Pour les techniques de ce mémoire utilisant des métamodèles, nous avons souvent fait le choix des réseaux de neurones dans les cas où la régression polynomiale ne donnait pas satisfaction. Dans nos applications, un réseau de neurones est toujours associé à une seule réponse et comporte rarement plus de dix paramètres d'entrées. Le nombre de couples entrée-sortie de la base d'apprentissage et de test dépend du MEF mais ne nécessite en général pas plus de 1 500 calculs exacts. Ceci ne représente pas plus d'une journée de calcul sur un ordinateur de puissance moyenne pour un MEF à quelques dizaines de milliers de ddls. Le temps d'apprentissage des réseaux utilisés ne dépasse que rarement le quart d'heure ce qui nous semble un temps de calcul raisonnable. Nous avons déjà précisé en fin du paragraphe 1.4.3 le





**Fig. 1.8** – Critères :  $R^2$  (a), ERAM (b), MERA (c)

type de réseau utilisé. Précisons que lorsque le temps le permet, il est toujours préférable de réaliser plusieurs apprentissages à partir de différentes initialisations et de choisir le modèle ayant la plus grande précision.



**Fig. 1.9** – Domaines et temps de création des différents métamodèles

## 1.5 Paramétrisation de modèle

La paramétrisation du modèle numérique étudié est toujours une étape indispensable à la réalisation d'un recalage ou d'une optimisation. Dans ce type d'analyse, les paramètres considérés sont les propriétés physiques et géométriques associées à un groupe d'éléments finis du modèle. Les caractéristiques matériaux telles que le module d'Young, la masse volumique ou le coefficient de Poisson constituent les propriétés physiques les plus utilisées. Les dimensions d'un élément telles que la longueur ou l'aire de la section d'un élément poutre, l'épaisseur d'une plaque ou d'éventuels *offsets* sont des exemples de paramètres géométriques. Cette étape de paramétrisation consiste à déterminer les paramètres influençant le plus les réponses du système ou encore à identifier les paramètres responsables des écarts essais-calculs. Dans le premier cas, si nous supposons que les paramètres sont incertains, des méthodes de sensibilité globales sont utilisées. C'est l'objet du premier paragraphe de cette section. Dans le deuxième cas, il s'agit d'une localisation de défauts dominants de modélisation. Nous abordons ce sujet dans le deuxième paragraphe.

### 1.5.1 Analyse de sensibilité en présence d'incertitudes

Tout comme au paragraphe 1.4.1, nous désignerons par  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n_p}]^T \in \mathcal{X}$  le vecteur des  $n_p$  paramètres candidats,  $\mathcal{X}$  représentant l'espace de variation des paramètres.  $\mathcal{X}$  caractérise donc le domaine d'incertitude des paramètres. Nous ne faisons pas ici d'hypothèse sur le modèle d'incertitude associé à chaque paramètre. La relation exacte entre la réponse  $y$  et les paramètres d'entrées  $\mathbf{x}$  est  $y = f(\mathbf{x})$ . Le nombre de paramètres susceptibles d'être étudiés dans un MEF étant en général très important, le choix des paramètres initiaux avec lesquels seront réalisées les analyses de sensibilité est souvent du ressort du jugement de l'analyste. De par son expérience et ses connaissances, il jugera s'il est intéressant de retenir tel ou tel paramètre. Il existe cependant des approches qualitatives permettant d'analyser les effets d'un grand nombre de paramètres.

#### Analyse qualitative

Par analyse qualitative nous entendons le type d'analyse réalisé par les méthodes dites de *screening*. Dans ces méthodes, l'approche OAT – *One Factor At Time* – est utilisée afin d'établir une hiérarchie au sein des variables d'entrée en fonction de leur influence sur la variabilité de la réponse. Ces méthodes restent qualitatives car elles ne quantifient pas l'importance d'un paramètre par rapport à un autre comme le font les méthodes quantitatives. Nous nous focalisons ici sur une de ces techniques de *screening*, la méthode de Morris [146].

Cette méthode que l'on peut rapprocher à un plan d'expérience, permet de classer les paramètres – aussi appelés facteurs – en trois groupes, selon que leurs effets soient (a) négligeables, (b) linéaires et sans interactions avec d'autres facteurs ou (c) non-linéaires ou avec interactions. L'espace des paramètres  $\mathcal{X}$  est tout d'abord discrétisé régulièrement afin que chaque paramètre  $x_k$  puisse prendre une valeur choisie parmi  $n_l$ . Ces valeurs sont appelées niveaux. Les paramètres peuvent suivre n'importe quelle distribution mais il est en pratique recommandé d'effectuer une transformation afin que les paramètres sur lesquels l'analyse sera réalisée soient uniformément distribués sur  $[0 ; 1]$ . Soit  $\mathbf{x}^{(i)}$  un échantillon de l'espace

$\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n_p \times n_l}$ . Pour cet échantillon, l'effet élémentaire du paramètre  $x_k$  est défini par

$$EE_k^{(i)} = \frac{f(\mathbf{x}^{(i)} \pm \Delta \mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}^{(i)})}{\pm \Delta}, \quad (1.90)$$

où  $\mathbf{e}_k$  est un vecteur unitaire dont toutes les composantes sont nulles exceptée la  $k^e$ .  $\Delta$  est une valeur choisie parmi  $1/(n_l - 1), \dots, 1 - 1/(n_l - 1)$ . Il est conseillé de prendre un nombre pair pour le nombre de niveau  $n_l$  et de choisir  $\Delta$  égal à  $n_l/(2n_l - 2)$  [30, 146].  $r$  échantillonnages – ou expériences – sont réalisés, permettant de construire  $r$  trajectoires de  $(n_p + 1)$  points dans l'espace  $\mathcal{X}'$ .  $\mathcal{X}'$  est une réduction de  $\mathcal{X}$  telle que  $\mathbf{x}^{(i)} + \Delta$  soit toujours dans  $\mathcal{X}$ . Pour un échantillon  $\mathbf{x}^{(i)}$ , la trajectoire est construite à partir d'une matrice d'orientation  $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{(n_p+1) \times n_p}$  selon [31]

$$\mathbf{O} = \mathbf{X}^{\text{rep}} + \frac{\Delta}{2} ((2\mathbf{B} - \mathbf{J})\mathbf{D} + \mathbf{J}). \quad (1.91)$$

$\mathbf{X}^{\text{rep}}$  est une matrice dont chaque ligne est le vecteur  $\mathbf{x}^{(i)}$ ,  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{(n_p+1) \times n_p}$  est une matrice de 1,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n_p+1) \times n_p}$  est une matrice strictement triangulaire inférieure et enfin  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n_p \times n_p}$  est une matrice diagonale dont les éléments ont une probabilité égale de prendre la valeur 1 ou -1. Dans la matrice  $\mathbf{O}$  ainsi obtenue, chaque colonne d'indice  $j$  possède deux lignes ne différant que pour la  $j^e$  composante. La trajectoire est construite en suivant dans l'ordre les valeurs relevées sur les lignes de  $\mathbf{O}$ . Généralement, quatre à dix trajectoires sont construites. La figure 1.10 représente l'exemple de trois trajectoires obtenues pour trois facteurs et quatre niveaux. Comme  $n_p = 3$ ,  $n_l = 4$ ,  $\Delta = n_l/(2n_l - 2) = 2/3$  et que les paramètres doivent prendre des valeurs discrètes parmi  $\{0; 1/3; 2/3; 1\}$ , pour que  $\mathbf{x}^{(i)}$  soit toujours dans  $\mathcal{X}$ , les valeurs initiales des paramètres sont choisies aléatoirement parmi  $\{0; 1/3\}$ . Considérons par exemple la trajectoire apparaissant en rouge sur la figure 1.10. Pour ce chemin,  $\mathbf{x}^{(i)} = [0 \ 1/3 \ 1/3]^T$  a été tiré et nous obtenons les matrices

$$\mathbf{X}^{\text{rep}} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.92)$$

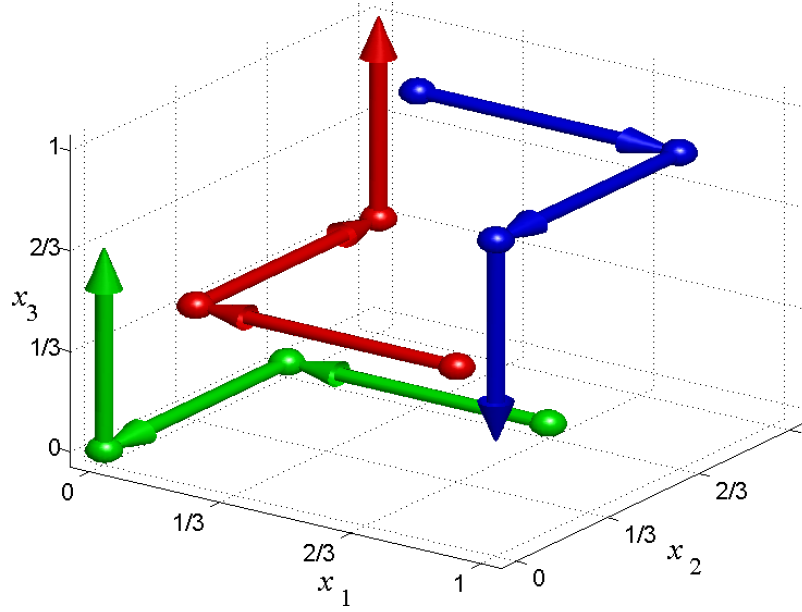
La matrice de permutation est calculée suivant l'équation (1.91) et a pour valeur

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.93)$$

Les effets élémentaires correspondants sont

$$\begin{aligned} EE_1^{(i)} &= \frac{f(0, 1/3, 1/3) - f(2/3, 1/3, 1/3)}{-\Delta}, \\ EE_2^{(i)} &= \frac{f(0, 1, 1/3) - f(0, 1/3, 1/3)}{\Delta} \quad \text{et} \\ EE_3^{(i)} &= \frac{f(0, 1, 1) - f(0, 1, 1/3)}{\Delta}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

$r$  trajectoires étant construites, le calcul de ces indices nécessite au final  $r(n_p + 1)$  éva-



**Fig. 1.10** – Trajectoires associées à la méthode de Morris

luations de la fonction d'intérêt. Pour chaque paramètre  $x_k$ , les mesures de sensibilité de la méthode de Morris sont la moyenne  $\mu_k^M = E(EE_k)$  et l'écart type  $\sigma_k^M = \sigma(EE_k)$  des  $r$  indices  $EE_k^{(i)}$ . La mesure de sensibilité proprement dite est donnée par  $\mu_k^M$ , une forte valeur absolue indiquant un facteur dont l'influence sur la réponse est importante sous toutes ses formes et une faible valeur absolue indiquant le contraire. « Sous toutes ses formes » signifie que cette mesure ne permet pas de distinguer si la sensibilité est due au paramètre seul ou à l'interaction de celui-ci avec les autres paramètres. Cependant, des informations supplémentaires sont obtenues par l'observation de  $\sigma_k^M$ . Si l'indice  $|\mu_k^M|$  est haut et  $\sigma_k^M$  est faible alors le paramètre influe linéairement et additivement sur la réponse, c'est-à-dire que son effet s'ajoute à ceux des autres paramètres de façon homogène sur son intervalle de variation. Si les indices  $|\mu_k^M|$  et  $\sigma_k^M$  sont forts alors le paramètre influe non-linéairement ou par ses interactions avec les autres facteurs. Le paramètre influe de lui-même de façon non-homogène sur la réponse ou bien l'influence vient des interactions avec les autres facteurs, sans toutefois pouvoir déterminer lesquelles.

Néanmoins, comme les effets élémentaires peuvent prendre des valeurs positives ou négatives, des variables influentes peuvent conduire à des valeurs  $\mu_k^M$  faibles. Lorsque le modèle possède plusieurs réponses, il est exclu pour la même raison de réaliser une moyenne globale sur l'ensemble des effets élémentaires de toutes les réponses. Pour remédier à cela, il est proposé dans [30] de compléter l'analyse en calculant un indice  $\mu_k^{M*} = E(|EE_k|)$ , moyenne de la valeur absolue des effets élémentaires. Cet indice est calculé pour estimer l'effet des paramètres sur chacune des réponses mais aussi leurs effets sur l'ensemble des réponses en calculant  $\mu_k^{M*}$  et  $\sigma_k^M$  sur tous les effets élémentaires obtenus.

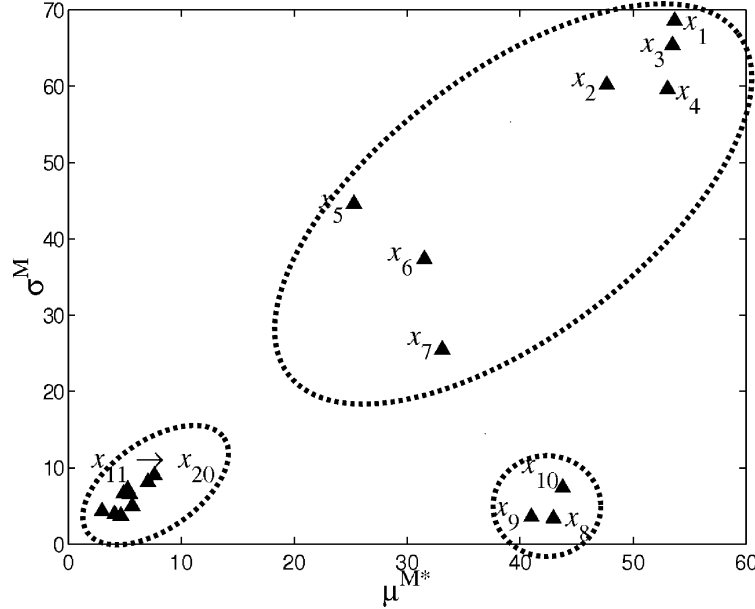
Comme dans l'article de Campolongo *et al.* [30], nous utilisons la fonction test de Morris [146] afin d'illustrer les résultats pouvant être obtenus avec cette méthode. Cette fonction

à vingt paramètres est définie par

$$\begin{aligned}
 y = & \beta_0 + \sum_{i=1}^{20} \beta_i w_i + \sum_{1 \leq i < j \leq 20} \beta_{i,j} w_i w_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 20} \beta_{i,j,k} w_i w_j w_k \\
 & + \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 20} \beta_{i,j,k,l} w_i w_j w_k w_l,
 \end{aligned} \tag{1.95}$$

avec  $w_i = 2(x_i - 0,5)$  sauf pour  $i = 3, 5, 7$  où  $w_i = 2(1,1 x_i / (x_i + 0,1) - 0,5)$ . Chaque variable  $x_i$  est uniformément distribuée sur  $[0 ; 1]$ . En ce qui concerne les coefficients,  $\beta_i = 20$  pour  $i = 1, \dots, 10$ ,  $\beta_{i,j} = -15$  pour  $i, j = 1, \dots, 6$ ,  $\beta_{i,j,k} = -10$  pour  $i, j, k = 1, \dots, 5$  et  $\beta_{i,j,k,l} = 5$  pour  $i, j, k, l = 1, \dots, 4$ . Les coefficients associés aux termes restants du premier et du second ordre sont indépendants identiquement distribués – i.i.d – à partir de la loi normale  $N(0, 1)$  et ceux associés aux termes restants du troisième et quatrième ordre sont nuls. Il est évident que ce type de fonction n'est pas caractéristique des relations que l'on rencontre en dynamique des structures, mais elle permet d'illustrer les différentes influences exposées précédemment. La figure 1.11 représente  $\mu_k^{M*}$  en fonction de  $\sigma_k^M$  pour chacun des vingt paramètres. Les indices ont été calculés pour  $n_l = 4$  et  $r = 10$  soit 210 simulations. Il y apparaît clairement trois groupes :

- un premier groupe composé des paramètres  $x_{11}$  à  $x_{20}$  dont les effets sont très faibles ;
- un deuxième groupe composé des paramètres  $x_8, x_9$  et  $x_{10}$  dont les effets sont importants mais linéaires ;
- un troisième groupe composé des paramètres  $x_1$  à  $x_7$  dont les effets non-linéaires et/ou interactions sont importants.



**Fig. 1.11** – Analyse de sensibilité de la méthode de Morris

La méthode de Morris est donc une méthode d'analyse efficace permettant d'estimer avec un nombre raisonnable de calculs les paramètres les moins influents d'un ensemble important tout en apportant quelques informations sur la nature des effets des paramètres auxquels la réponse est sensible. Pourtant, comme il est remarqué dans [30], les exemples de son application sont rares dans la littérature. Nous présenterons au paragraphe 3.2.5 de ce mémoire, les résultats obtenus pour une étude conduite sur un modèle de rotor de taille

significative.

Les méthodes de *screening* sont des analyses de sensibilité pouvant être appliquées à tout type de domaines, mathématique, physique, ingénierie, économie, *etc.* En ce qui concerne la mécanique et en particulier l'analyse modale, une analyse qualitative plus spécifique est l'observation des énergies de déformation et cinétique. Intuitivement, si un mode propre un élément – poutre, plaque, *etc.* – possède proportionnellement aux autres une grande énergie de déformation ou cinétique, il y a de fortes chances que les paramètres associés à cet élément aient une influence notable sur la fréquence et vecteur propre de ce mode. Pour un élément de matrices de raideur  $\mathbf{K}^e$  et de masse  $\mathbf{M}^e$ , la sensibilité des réponses aux paramètres est évaluée par le calcul des vecteurs

$$\mathbf{e}^{\text{def}} = \frac{1}{2} \text{diag}(\Phi^T \mathbf{K}^e \Phi) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}^{\text{cin}} = \frac{1}{2} \text{diag}(\Phi^T \mathbf{M}^e \Phi \Lambda) \quad (1.96)$$

dont les composantes contiennent respectivement les énergie de déformation et cinétique associés aux différents modes de la base modales  $\Phi$ . Chaque élément appartient en général à un groupe d'éléments paramétrés dont les énergies seront évaluées en sommant les effets élémentaires. À partir des seuls calculs de  $\mathbf{e}^{\text{def}}$  et de  $\mathbf{e}^{\text{cin}}$ , il est possible de comparer les énergies des différents ensembles d'éléments. Les ensembles avec les plus fortes énergies possèdent les paramètres les plus influents. Cependant, cette analyse est locale et déterministe puisque réalisée pour des valeurs fixées des données du modèle. Comme nous le remarquerons dans le paragraphe suivant, l'analyse locale n'est pas une approche satisfaisante pour aborder les problèmes de sensibilité en présence d'incertitudes.

Quelles que soient les analyses qualitatives choisies, celles-ci s'avèrent indispensables dans le processus de paramétrisation afin de réduire le nombre de variables. Une fois ce travail réalisé, une analyse cette fois quantitative doit être conduite afin d'affiner l'analyse et éventuellement fixer d'autres paramètres.

### Analyse quantitative

Nous avons vu que les analyses de sensibilité qualitatives permettent seulement de classer les paramètres selon leurs influences sur la variabilité de la réponse. Avec l'analyse quantitative, nous allons pouvoir en plus quantifier l'importance d'un facteur par rapport à un autre ou l'importance des interactions.

**Sensibilité locale** La méthode la plus couramment utilisée dans l'analyse de sensibilité est l'étude de sensibilité autour d'une valeur particulière  $\mathbf{x}^{(0)}$  contenant par exemple les valeurs nominales des paramètres du modèle. L'approche OAT est utilisée afin de calculer des indices basés sur les dérivés partielles  $\partial f / \partial x_i$  de  $f$ . Cependant, comme il est souligné dans [174], ce type d'analyse n'est réellement justifié que pour des modèles linéaires. Lorsque les paramètres sont associés à un modèle d'incertitude, on préférera l'analyse de sensibilité globale. Là où la sensibilité locale s'intéresse à la valeur de la réponse, la sensibilité globale s'intéresse à la variabilité de cette réponse. On notera aussi que l'étude des dérivées peut être vue comme un cas spécial de la méthode de Morris où  $\Delta$  serait faible et  $r = 1$ . La méthode de Morris a toutefois l'avantage de couvrir l'ensemble de l'espace des pa-

ramètres. Dans ce sens, elle peut être classée parmi les mesures de sensibilité globale qui allons désormais aborder.

**Sensibilité globale** La sensibilité globale a pour objet l'étude des effets de la variation de  $\mathbf{x}$  dans  $\mathcal{X}$  sur la réponse  $y$ . Dans [173] est réalisée une revue des nombreuses techniques associées, techniques qui sont regroupées en méthodes fiabilistes, méthodes bayésiennes, méthodes graphiques et méthodes basées sur l'analyse de la variance. Nous nous sommes plus particulièrement intéressés à cette dernière classe.

Tout d'abord, précisons que ces méthodes sont à classer parmi les méthodes de Monte Carlo, elles nécessitent donc de nombreuses simulations. Suivant la complexité du modèle, il se peut que l'évaluation exacte de la relation  $y = f(\mathbf{x})$  rende le calcul des indices de sensibilité impossible dans un temps raisonnable. En vue de faciliter le calcul, il conviendra alors d'utiliser des métamodèles tels que ceux présentés section 1.4.

L'approche la plus simple à mettre en oeuvre est la simulation de Monte Carlo. Les tirages peuvent résulter d'un échantillonnage aléatoire classique ou d'une autre méthode telle que par exemple l'échantillonnage hypercube latin. Sur le plan qualitatif, à partir des simulations, il est courant de tracer des figures du style diagramme de dispersion – ou *scatterplot* en anglais – afin de visualiser les relations entrées-sorties. Sur le plan quantitatif, il est aussi courant de calculer des indices basés sur les coefficients de régression ou de corrélation tels que les indices SRC – *Standardized Regression Coefficient* – ou PCC – *Partial Correlation Coefficient*. Le calcul de ces indices nécessite tout de même l'hypothèse de linéarité sur le modèle. Si le modèle n'est pas linéaire mais monotone par rapport à chacune des variables lorsque les autres sont fixées [83], les indices SRC et PCC sont calculés à partir des simulations réordonnées après une transformation basée sur les rangs pour obtenir les indices SRRC – *Standardized Rank Regression Coefficient* – et PRCC – *Partial Rank Correlation Coefficient* [175]. Ces hypothèses peuvent être vérifiées lorsqu'un polynôme d'ordre faible est utilisé pour simuler la réponse, mais l'on préférera souvent des méthodes plus générales ne nécessitant pas d'hypothèses sur le modèle. C'est le cas des méthodes de type ANOVA – ANalysis Of VAriances.

Ces méthodes reposent sur la décomposition de la variance de la réponse

$$V(y) = V(E(y|x_i)) + E(V(y|x_i)). \quad (1.97)$$

$V(y)$  est la variance de la réponse  $y$ ,  $E(y|x_i)$  et  $V(y|x_i)$  sont respectivement l'espérance et la variance conditionnelles de  $y$  sachant  $x_i$ ,  $x_i$  étant fixé à une valeur de son intervalle de variation. La variance de l'espérance conditionnelle  $V(E(y|x_i)) = V_i$  est considérée comme une bonne mesure de la sensibilité de  $y$  à  $x_i$ ,  $V_i$  étant grande si le paramètre  $x_i$  est important. Après normalisation, l'indice de sensibilité quantifiant la part de la variance de  $y$  due à  $x_i$  est donné par

$$S_i = \frac{V_i}{V(y)}. \quad (1.98)$$

Sobol' [189] appelle cet indice dont la valeur varie entre 0 et 1, indice de sensibilité du premier ordre. Pour obtenir des indices d'ordres plus élevés rendant compte des effets des interactions paramétriques sur la réponse, il suffit de généraliser la décomposition donnée

équation (1.97) par la décomposition de Sobol' [189]

$$V(y) = \sum_{i=1}^{n_p} V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n_p} V_{ij} + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n_p} V_{ijk} + \dots + V_{1\dots n_p} \quad (1.99)$$

avec

$$\begin{aligned} V_{ij} &= V(E(y|x_i, x_j)) - V_i - V_j, \\ V_{ijk} &= V(E(y|x_i, x_j, x_k)) - V_{ij} - V_{ik} - V_{jk} - V_i - V_j - V_k, \\ &\dots \\ V_{1\dots n_p} &= V(y) - \sum_{1 \leq i < j \leq n_p} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i < \dots \leq n_p} V_{1\dots n_p-1}. \end{aligned} \quad (1.100)$$

À partir de ces termes, nous pouvons définir des indices de sensibilité à l'ordre deux  $S_{ij} = V_{ij}/V(y)$ , à l'ordre trois  $S_{ijk} = V_{ijk}/V(y)$ , etc. Par exemple, les  $n_p(n_p - 1)/2$  indices  $S_{ij}$  quantifient la part de la variance de  $y$  due à l'interaction des paramètres  $x_i$  et  $x_j$  qui n'est pas prise en compte dans l'effet des variables seules. Il est théoriquement possible de calculer  $2^{n_p} - 1$  indices de sensibilité mais dans la pratique seuls les termes du premier et second ordre sont estimés. Le calcul de tous les indices serait en effet fastidieux et par ailleurs, comme il est souligné dans [172, 174], les interactions d'ordres supérieurs sont assez rares.

L'analyse peut être enfin complétée par le calcul d'indices de sensibilité totaux comme proposé dans [75]. L'indice de sensibilité total  $S_i^T$  relatif au paramètre  $x_i$  est défini comme la somme de tous les indices relatifs à la variable  $x_i$ . Ainsi, si  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$ , alors l'indice de sensibilité total relatif à  $x_2$  est

$$S_2^T = S_2 + S_{12} + S_{23} + S_{24} + S_{123} + S_{124} + S_{234} + S_{1234}. \quad (1.101)$$

On notera que si seuls les indices d'ordre un et deux ont été calculés, il est possible d'apprécier l'influence des interactions d'ordres supérieurs en soustrayant les indices calculés à l'indice de sensibilité total. Si le reste est faible, alors nous pouvons conclure que les interactions paramétriques d'ordre trois et plus n'ont quasiment pas d'effet, dans le cas contraire, ces interactions ont une influence et il peut convenir de calculer au moins les indices d'ordre trois.

Les indices étant définis, il reste désormais à les calculer ou plutôt les estimer car sauf dans le cas d'une fonction  $f$  simple, il n'est pas envisageable de les déterminer analytiquement. Parmi les techniques existantes, les plus couramment utilisées sont les méthodes de Sobol' [189], FAST [41, 178] et de McKay [139]. La méthode FAST consiste à décomposer la variance de  $y$  en utilisant la transformée de Fourier. La méthode originale permet seulement d'estimer les indices du premier ordre mais la version étendue proposée dans [176] permet d'obtenir les indices de sensibilité totaux. Dans la méthode de McKay, les indices du premier ordre sont estimés à partir d'échantillonnages hypercubes latins répliqués. Enfin, la méthode de Sobol' permet d'obtenir tous les indices de sensibilité présentés précédemment à partir d'échantillonnages aléatoires. Bien que demandant plus de calculs que les deux autres, la méthode de Sobol' est plus complète car tous les indices sont susceptibles d'être calculés. Elle a de plus l'avantage d'être facile à mettre en oeuvre. On trouvera dans [172], une démarche permettant d'estimer efficacement les indices du premier et du second ordre ainsi



que les indices totaux.

La décomposition (1.99) n'est valable que si l'on suppose que les paramètres d'entrée sont indépendants. Dans le cas de dépendances connues entre variables, il est nécessaire d'adapter la méthode [83, 172].

Reprenons la fonction définie par l'équation (1.95). L'analyse par la méthode de Morris a fait ressortir que les paramètres  $x_{11}$  à  $x_{20}$  ont des effets très faibles, que les paramètres  $x_8$ ,  $x_9$  et  $x_{10}$  ont des effets significatifs mais linéaires et qu'enfin les paramètres  $x_1$  à  $x_7$  ont des effets non-linéaires importants et/ou avec interactions. Nous allons appliquer la méthode de Sobol' pour les paramètres jugés influents par la méthode de Morris. Les paramètres  $x_{11}$  à  $x_{20}$  sont fixés à une valeur aléatoire comprise entre 0 et 1. Les valeurs des indices de sensibilité du premier ordre et totaux obtenues pour 10 000 simulations sont représentées figure 1.12. Nous constatons que pour les paramètres  $x_7$  à  $x_{10}$  les deux indices ont pratiquement la même valeur, indiquant que les interactions entre ces facteurs n'ont pas d'effets sur la variabilité de la réponse. Pour les paramètres  $x_8$  à  $x_{10}$ , ceci confirme l'information donnée par la méthode de Morris. Le paramètre  $x_7$  avait été classé dans le groupe des paramètres avec effets non-linéaires et/ou avec interactions, après cette nouvelle analyse nous pouvons conclure que l'effet de  $x_7$  est non-linéaire. Les paramètres  $x_1$  à  $x_6$  ont des faibles indices d'ordre un mais de forts indices totaux, ce qui signifie que l'effet de ces paramètres est dû seulement à leurs interactions. Là encore, l'analyse par la méthode de Morris est correcte. Les valeurs des indices  $S_{ij}$  non nuls sont utilisées pour construire le graphique figure 1.13. Les paramètres  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_4$  interagissent le plus avec les autres, les plus fortes interactions étant  $x_1 - x_2$ ,  $x_1 - x_4$  et  $x_2 - x_4$ . Nous pouvons aussi constater que les paramètres  $x_3$ ,  $x_5$  et  $x_6$  interagissent peu avec les autres. En vue de réduire le nombre de paramètres, il paraît donc raisonnable de les fixer.

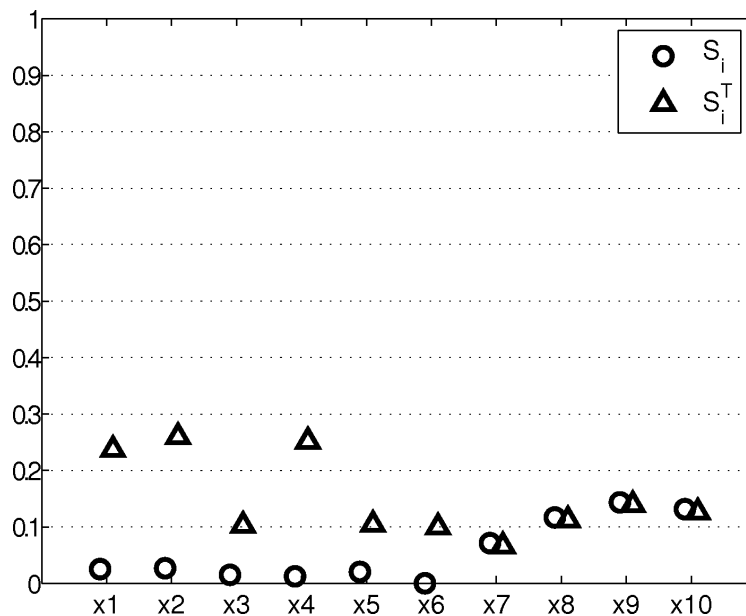
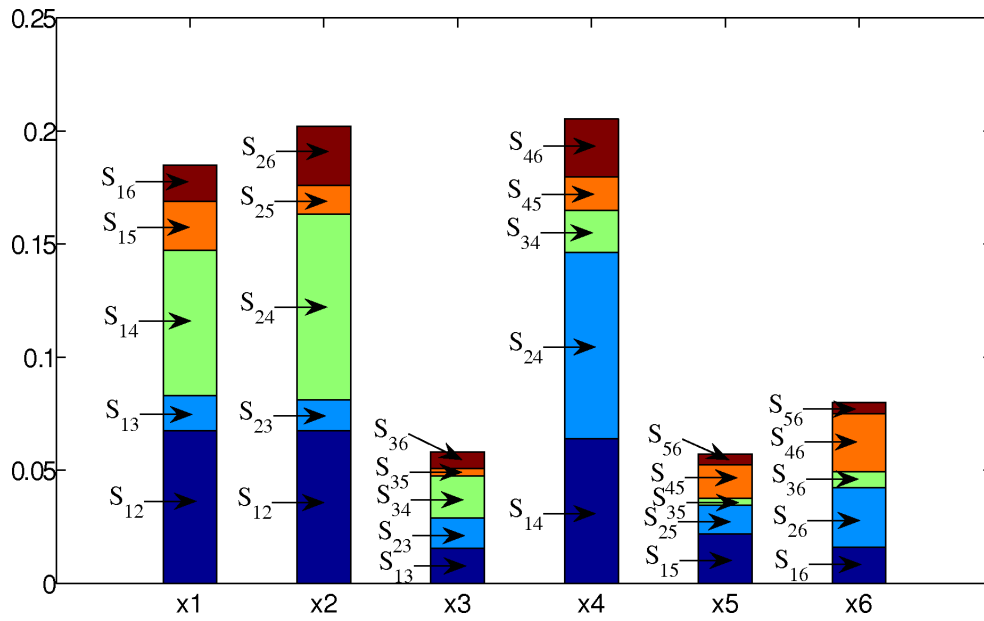


Fig. 1.12 – Indices de sensibilité du premier ordre ( $\circ$ ) et totaux ( $\triangle$ )

Cet exemple montre que cette méthode est très complète, elle permet de classer les variables suivant leurs importances, d'étudier les interactions et de fixer les moins influentes. Cependant, le coût numérique est élevé, la convergence des indices de sensibilité deman-



**Fig. 1.13** – Indices de sensibilité du second ordre pour les paramètres  $x_1$  à  $x_6$

dant un nombre de simulations supérieur à  $10^3$ . C'est pourquoi, comme évoqué précédemment l'utilisation de métamodèles peut s'avérer indispensable. Il faut remarquer que la construction du métamodèle demande elle aussi un nombre non-négligeable de calculs. Nous pensons qu'il s'agit du prix à payer pour obtenir une analyse de qualité.

Il est mentionné dans les travaux de Liu *et al.* [119, 120] que les méthodes basées sur l'analyse de la variance supposent que la variance soit suffisante pour décrire la variabilité de la réponse. Ces méthodes perdent de leurs précisions lorsque la variabilité des paramètres amène une réponse avec une densité de probabilité à fort coefficient d'asymétrie – queue de distribution très étalée – ou à fort coefficient d'aplatissement – forme très aplatie. Les auteurs proposent une méthode de sensibilité basée sur la distance de Kullback-Liebr [104]. Cette distance, qui sera définie au paragraphe 3.3.1, permet de calculer un indice de sensibilité au premier ordre et un indice de sensibilité total s'affranchissant des problèmes évoqués. La méthode peut aussi être appliquée dans une analyse de sensibilité fiabiliste.

### 1.5.2 Localisation d'erreurs

Les méthodes de localisation d'erreurs de modélisation sont couramment utilisées comme une étape préalable à une procédure de recalage. Elles consistent à confronter des résultats expérimentaux aux résultats de simulations numériques et permettent de sélectionner les paramètres du modèle qui devront être corrigés afin d'améliorer la prédiction du modèle dynamique. Une revue de différentes méthodes de localisation applicables dans le domaine modal pourra être trouvée en [143]. Les méthodes peuvent être regroupées en deux catégories. La première catégorie utilise des critères pointant des ddls. Parmi ceux-ci, on notera l'utilisation du critère COMAC – *Coordinate Modal Assurance Criterion* [117] – pour mesurer la corrélation entre un mode expérimental et son apparié numérique [156] ou encore le critère des forces résiduelles [56, 205]. Les ddls présentant des écarts essais-calculs sont ainsi détectés. D'une manière générale, ces méthodes s'avèrent peu fiables. On leur préférera la seconde catégorie à savoir les méthodes dont les critères pointent sur des éléments. Nous

pouvons distinguer les méthodes basées sur la sensibilité – au sens de dérivée – [109, 213] et les méthodes basées sur des critères énergétiques. Pour ces dernières, nous citerons sous les méthodes utilisant l'erreur en relation de comportement – ERDC – [45, 105], la *minimum dynamic residual expansion* – MDRE – [10] et la *minimization of errors in constitutive equations* – MECE [161, 162]. Ces techniques possèdent des développements très proches.

Puisque la méthode MDRE sera utilisée sous une forme adaptée en section 2.2, nous présentons ici une partie de son développement.

Soient  $N$  le nombre de ddls du MEF et  $\mathbf{y}_v$  le  $v^e$  vecteur propre du MEF. Des mesures expérimentales effectuées en  $c$  points de la structure permettent d'obtenir le  $v^e$  vecteur propre expérimental  ${}_c\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  de valeur propre  $\lambda_v^{\text{exp}}$ . Cependant, le nombre de points de mesures est en général très inférieur au nombre de ddls du modèle. En particulier, les ddls de rotations ou ddls internes ne sont pas observables expérimentalement. Pour rendre compatibles ces observations avec le MEF, une solution est d'effectuer une expansion sur les ddls du MEF. Nous devons donc reconstituer  $r = N - c$  ddls. Soit  $\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  le  $v^e$  vecteur propre obtenu par un processus d'expansion. Dans le cas de l'expansion MDRE,  $\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  est obtenu en résolvant le système

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_v & \gamma \mathbf{L}^T \mathbf{K}^r \mathbf{L} \\ \mathbf{K} & -\mathbf{Z}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_v \\ \mathbf{y}_v^{\text{exp}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma \mathbf{L}^T \mathbf{K}^r {}_c\mathbf{y}_v^{\text{exp}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.102)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice de raideur du modèle,  $\mathbf{Z}_v = \mathbf{K} - \lambda_v^{\text{exp}} \mathbf{M}$  est la matrice de raideur dynamique du mode  $v$ ,  $\mathbf{K}^r$  est la matrice de raideur réduite aux ddls observés dans l'expérience,  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{c,N}$  est la matrice de localisation des ddls observés et  $\gamma$  est un coefficient de confiance dans les mesures. Nous obtenons donc  $\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  et  $\mathbf{r}_v$ , vecteur des déplacements résiduels relatif au mode  $v$ , calculé en résolvant

$$\mathbf{r}_v = \mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f}_v, \quad (1.103)$$

avec  $\Delta \mathbf{f}_v = \mathbf{Z}_v \mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  les forces résiduelles issues du processus d'expansion. Dans le cas où le nombre de ddls serait très important, il est aussi possible de réaliser le calcul en utilisant une base de condensation [47, 143].

La localisation des éléments défaillants en raideur est effectuée à partir du critère de l'énergie élémentaire

$$e_v^{(el)} = \mathbf{r}_v^T \mathbf{L}^{(el)} \mathbf{K}^{(el)} \left( \mathbf{L}^{(el)} \right)^T \mathbf{r}_v, \quad (1.104)$$

où  $\mathbf{K}^{(el)}$  est la matrice de raideur associée à un élément  $(el)$  et  $\mathbf{L}^{(el)}$  la matrice de localisation des ddls de cet élément. Il s'agit pour l'instant d'un critère valable pour l'élément et le mode considérés. Les éléments possédant une valeur de  $e_v^{(el)}$  très élevée par rapport aux autres sont susceptibles de présenter un défaut de modélisation en raideur. Un MEF pouvant posséder des milliers d'éléments, il paraît plus raisonnable de localiser les erreurs au niveau de sous-domaines. Les sous-domaines sont généralement définis de sorte à regrouper les éléments possédant des paramètres identiques. Pour un sous-domaine d'indice  $(ss)$ , le critère à considérer sera alors  $e_v^{(ss)} = \sum_{el \in ss} e_v^{(el)}$ . Si l'on souhaite évaluer la contribution sur tous les modes, on utilisera le critère  $e^{(ss)} = \sum_v e_v^{(ss)}$ .

En fait, les critères que nous venons de définir ne sont pas utilisés directement sous cette forme. Une pondération est en effet nécessaire afin de permettre les comparaisons. Pour une discussion sur les différents choix possible on se référera à [143]. On remarquera aussi que ce développement localise des erreurs en raideur. La méthode ERDC telle qu'elle est présentée

dans [45] et dans l'annexe D, permet d'étendre ce type de critère à la localisation d'erreur en masse.

Il faut tout de même remarquer que la localisation des défauts de modélisation dominants par la méthode MDRE ou tout autre méthode n'est pas garantie. Compte tenu des limitations de la méthode utilisée ou des incertitudes de modélisation et de mesure, il est aussi important de pouvoir déterminer dans quelle mesure les résultats de la localisation sont fiables. Pour tenter de répondre à ce problème, Michot [143] a développé des indicateurs dits de visibilité et de discernabilité dont les buts sont de s'assurer avant de lancer le processus de localisation, que les sous-domaines étudiés sont localisables et qu'un défaut dans un des sous-domaines est discernable des défauts dans les autres sous-domaines. La variabilité des résultats en fonction du niveau d'incertitude estimé sur les données y est aussi étudiée.



# Aide à la décision en synthèse modale

## Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Utilisation des modes propres orthogonaux en synthèse modale . . . . .</b>	<b>52</b>
2.1.1	Décomposition en modes propres orthogonaux . . . . .	52
2.1.2	Adaptation à la sous-structuration . . . . .	56
2.1.3	Applications . . . . .	62
2.1.4	Conclusion . . . . .	76
<b>2.2</b>	<b>Qualification des super-éléments . . . . .</b>	<b>77</b>
2.2.1	Filtrage . . . . .	77
2.2.2	Localisation . . . . .	80
2.2.3	Correction . . . . .	81
2.2.4	Application au moteur d'avion . . . . .	82
2.2.5	Conclusion . . . . .	87
<b>2.3</b>	<b>Choix optimal des degrés de liberté maîtres . . . . .</b>	<b>88</b>
2.3.1	Méthode d'optimisation proposée . . . . .	89
2.3.2	Application . . . . .	91
2.3.3	Conclusion . . . . .	93

Dans ce chapitre sont proposées différentes méthodes permettant de faciliter la prise de décision en sous-structuration. Nous présentons en premier lieu une méthode de synthèse modale basée sur l'utilisation des modes propres orthogonaux et notamment son application à la condensation robuste. Ensuite, nous décrivons une méthodologie de vérification de modèles construits par sous-structuration. La dernière section de ce chapitre concerne une technique utilisant les algorithmes génétiques afin de choisir les ddls maîtres « optimaux » lors de la condensation de type Guyan ou Craig-Bampton.

## 2.1 Utilisation des modes propres orthogonaux en synthèse modale

La décomposition orthogonale en modes propres – ou communément POD de l’anglais *Proper Orthogonal Decomposition* – est une méthode d’analyse permettant d’extraire les informations essentielles d’un ensemble de données. Il en résulte des modes propres orthogonaux – POM – pouvant être utilisés comme base de représentation des données.

L’idée de la POD peut être trouvée dans les travaux de Kosambi [103], Loève [124], Karhunen [87], Pougachev [164] ou encore Obukhov [155]. Les formes les plus populaires de la POD sont la décomposition de Karhunen-Loève – DKL –, l’analyse en composante principale – ACP ou plus couramment PCA – et la décomposition en valeurs singulières – DVS. Il est démontré dans [116, 207] que ces trois méthodes sont équivalentes lorsque la POD est appliquée à des vecteurs aléatoires discrets. La PCA introduite par Hotelling [77], a pour objet de réduire la dimension de l’espace des variables aléatoires corrélées tout en maximisant la variance. La DKL a été développée indépendamment par Karhunen [87] et Loève [124] afin de décomposer un processus temporel stochastique continu en une série optimale de fonctions. Elle permet d’étendre la PCA au cas des espaces à dimensions infinies. Si discrétisée, elle est équivalente à la PCA d’un vecteur aléatoire [116]. Enfin, la DVS, dont les premiers développements remontent aux années 1870 avec les travaux de Beltrami et Jordan, est un procédé d’algèbre linéaire permettant d’étendre la décomposition en valeurs propres à toute matrice rectangulaire. Nous obtenons une base de vecteurs identique à celle obtenue par la PCA et donc par la DKL sous sa forme discrétisée, ce qui, comme nous le verrons plus loin, s’avère très important du point de vue pratique.

La POD a été exploitée dans un grand nombre de domaines tels que par exemple la turbulence [27, 74, 188] ou encore le transfert de chaleur [152]. Son application en dynamique des structures est désormais assez répandue, avec notamment un emploi pour la construction de modèles réduits de systèmes linéaires et non-linéaires [5, 86, 90, 91, 95] ou l’identification et le recalage de modèles non-linéaires [90, 91, 113].

Kim propose dans [95] d’utiliser les POMs comme base de représentation en synthèse modale. Nous étudions ici le potentiel de cette technique. Dans l’article original, la méthode est appliquée sur des modèles dont la taille ne dépasse pas 126 ddls. Nous proposons d’étendre l’analyse à des modèles plus conséquents. Nous montrerons qu’il est aussi possible d’enrichir la base obtenue pour la réanalyse approchée lors de modifications structurales.

### 2.1.1 Décomposition en modes propres orthogonaux

L’idée est de décrire un ensemble statistique donné avec un minimum de modes. Soit  $\mathbf{y}(x, t)$  la réponse d’un système sur un espace  $\Omega$  où  $x$  est un paramètre spatial aléatoire et  $t$  le temps. Nous considérons que l’espace  $\Omega$  est discrétisé en  $m$  points et que donc  $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x, t)$  est un vecteur aléatoire appartenant à  $\mathbb{R}^{N,1}$ . Dans la pratique,  $\mathbf{y}$  n’est connue qu’en un nombre fini de points temporels. Ainsi, au temps  $t_k$ , correspond l’échantillon  $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t_k)$ . Ces échantillons sont concaténés dans la matrice  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_k \cdots \mathbf{y}_m]$ . Supposons que nous possédions  $m$  échantillons linéairement indépendants. De plus, considérons que  $\mathbf{y}$  est ergodique, c’est-à-dire que sur une période finie  $T$ , la valeur moyenne temporelle de  $\mathbf{y}$  est égale à son espé-

rance  $E(\mathbf{y})$ .  $E(\mathbf{y})$  sera alors exprimée et approximée par

$$E(\mathbf{y}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) dt = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{y}_k \simeq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \mathbf{y}_k. \quad (2.1)$$

Si la moyenne des échantillons n'est pas nulle, il est nécessaire de leurs soustraire  $E(\mathbf{y})$ . Ainsi, pour  $k = 1, \dots, n$ ,  $\mathbf{y}_k$  devient  $\mathbf{y}_k - E(\mathbf{y})$ . Nous considérons par la suite que cette centralisation a été réalisée et que donc  $E(\mathbf{y}) = 0$ .

Puisque c'est la situation rencontrée en pratique, nous exposons dans ce qui suit la DKL sous sa forme discrète [116]. Soit  $\Phi$  une base arbitraire de vecteurs orthonormaux  $\Phi_i \in \mathbb{R}^{N,1}$ . Dans cette base,  $\mathbf{y}$  s'exprime

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i = \Phi \mathbf{q}, \quad (2.2)$$

$\mathbf{q}$  étant un vecteur de coordonnées généralisées.

L'objectif est de trouver une base orthonormale déterministe la plus représentative de l'ensemble des réponses échantillonnées. Si l'on veut approcher un échantillon en utilisant seulement une base de  $l$  premiers vecteurs, alors on souhaite que  $\hat{\mathbf{y}}_k = \sum_{i=1}^l q_i \Phi_i$  soit la meilleure approximation de  $\mathbf{y}_k$ . L'erreur au sens des moindres carrés peut être exploitée à ce propos. Nous cherchons alors à résoudre le problème de minimisation sous contrainte

$$\begin{cases} \min_{\Phi_i} \epsilon^2 = E \left( \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i - \hat{\mathbf{y}}_k \right)^2 \\ \text{avec } \Phi_i^T \Phi_j = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.3)$$

La condition permet de s'assurer de l'unicité de la base.

L'expression de  $\epsilon^2$  peut être simplifiée sous la forme

$$\epsilon^2 = E \left( \sum_{i=l+1}^N q_i \Phi_i \right)^2. \quad (2.4)$$

Comme  $\Phi_i^T \Phi_j = \delta_{ij}$ , nous avons

$$\epsilon^2 = E \left( \sum_{i=l+1}^N q_i^2 \right) = \sum_{i=l+1}^N E(q_i^2). \quad (2.5)$$

En remarquant que  $q_i = \Phi_i^T \mathbf{y}$  et  $E(\mathbf{y}) = 0$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \sum_{i=l+1}^N E(\Phi_i^T \mathbf{y} \mathbf{y}^T \Phi_i) = \sum_{i=l+1}^N \Phi_i^T E((\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))^T) \Phi_i \\ &= \sum_{i=l+1}^N \Phi_i^T \Sigma_{\mathbf{y}} \Phi_i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\Sigma_{\mathbf{y}} = E((\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))^T)$  est la matrice de covariance de taille  $N \times N$  associée à  $\mathbf{y}$ . Compte tenu de l'hypothèse (2.1) et que  $E(\mathbf{y}) = 0$ , cette matrice sera calculée par

$$\Sigma_{\mathbf{y}} = \frac{1}{m} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T. \quad (2.7)$$



Le problème d'optimisation (2.3) devient

$$\begin{cases} \min_{\Phi_i} \epsilon^2 = \sum_{i=l+1}^N \Phi_i^T \Sigma_y \Phi_i \\ \text{avec } \Phi_i^T \Phi_j = \delta_{ij} \quad i, j = l+1, \dots, N \end{cases} \quad (2.8)$$

Nous résolvons ce problème en construisant le lagrangien

$$L = \sum_{i=l+1}^N \Phi_i^T \Sigma_y \Phi_i + \sum_{i=l+1}^N \sum_{j=l+1}^N \mu_{ij} (\Phi_i^T \Phi_j - \delta_{ij}), \quad (2.9)$$

où  $\mu_{ij}$  sont les multiplicateurs de Lagrange.

Pour  $i = l+1, \dots, N$ , la minimisation sans contrainte de  $L$  par rapport à  $\Phi_i$  se traduit alors par la condition de stationnarité

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \Phi_i} &= 0 \\ 2(\Sigma_y \Phi_i - \Phi_{N-l} \mu_i) &= 0, \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec  $\Phi_{N-l}$  la base réduite au  $N-l$  derniers vecteurs de  $\Phi$  et  $\mu_i = [\mu_{l+1,i} \mu_{l+2,i} \dots \mu_{N,i}]^T$ .

En étendant l'équation (2.10) à l'ensemble des vecteurs de  $\Phi_{N-l}$ , nous obtenons que les vecteurs  $\Phi_i$  satisfaisant l'équation (2.8) doivent vérifier

$$\Sigma_y \Phi_{N-l} = \Phi_{N-l} M_{N-l}, \quad (2.11)$$

où  $M = [\mu_{l+1} \mu_{l+2} \dots \mu_N]$ . Il nous reste désormais à obtenir  $\Phi_{N-l}$  et  $M_{N-l}$ .

En multipliant à gauche la dernière équation par  $\Phi_{N-l}^T$ , il vient

$$\begin{aligned} M_{N-l} &= \Phi_{N-l}^T \Sigma_y \Phi_{N-l} \\ &= \Phi_{N-l}^T E \left( (\mathbf{y} - E(\mathbf{y})) (\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))^T \right) \Phi_{N-l} \\ &= E \left( (\Phi_{N-l}^T \mathbf{y} - E(\Phi_{N-l}^T \mathbf{y})) (\Phi_{N-l}^T \mathbf{y} - E(\Phi_{N-l}^T \mathbf{y}))^T \right) \\ &= E \left( (\mathbf{q}_{N-l} - E(\mathbf{q}_{N-l})) (\mathbf{q}_{N-l} - E(\mathbf{q}_{N-l}))^T \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec  $\mathbf{q}_{N-l} = \Phi_{N-l}^T \mathbf{y}$ , c'est-à-dire le vecteur des  $N-l$  dernières composantes de  $\mathbf{q} = \Phi^T \mathbf{y}$ . Nous constatons que  $M_{N-l}$  est la matrice de covariance de  $\mathbf{q}_{N-l}$  et que donc il s'agit d'une matrice symétrique réelle définie positive. Si  $\Lambda_{N-l}$  et  $\Psi_{N-l}$  sont respectivement la matrice diagonale des valeurs propres et la base de vecteurs propres orthonormale de  $M_{N-l}$ , nous obtenons à partir de sa décomposition propre

$$\Lambda_{N-l} = \Psi_{N-l}^T M_{N-l} \Psi_{N-l}, \quad (2.13)$$

expression qui, si nous utilisons la première ligne de (2.12), devient

$$\Lambda_{N-l} = (\Phi_{N-l} \Psi_{N-l})^T \Sigma_y (\Phi_{N-l} \Psi_{N-l}). \quad (2.14)$$

Nous constatons avec cette expression que la diagonale de  $\Lambda_{N-l}$  contient  $N-l$  valeurs propres de  $\Sigma_y$  et que les  $N-l$  vecteurs propres correspondants forment la base  $\Phi_{N-l} \Psi_{N-l}$  que

nous noterons  $\mathbf{Y}_{N-l}$ .

En remarquant que  $\sum_{i=l+1}^N \boldsymbol{\Phi}_i^T \boldsymbol{\Sigma}_y \boldsymbol{\Phi}_i = \text{tr}(\boldsymbol{\Phi}_{N-l}^T \boldsymbol{\Sigma}_y \boldsymbol{\Phi}_{N-l})$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_{N-l} = \mathbf{Y}_{N-l} \boldsymbol{\Psi}_{N-l}^T$  et en utilisant la commutativité de la trace,  $\varepsilon^2$  devient

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= \text{tr}(\boldsymbol{\Phi}_{N-l}^T \boldsymbol{\Sigma}_y \boldsymbol{\Phi}_{N-l}) = \text{tr}(\boldsymbol{\Psi}_{N-l} \mathbf{Y}_{N-l}^T \boldsymbol{\Sigma}_y \mathbf{Y}_{N-l} \boldsymbol{\Psi}_{N-l}^T) \\ &= \text{tr}(\mathbf{Y}_{N-l}^T \boldsymbol{\Sigma}_y \mathbf{Y}_{N-l} \boldsymbol{\Psi}_{N-l}^T \boldsymbol{\Psi}_{N-l}) = \text{tr}(\mathbf{Y}_{N-l}^T \boldsymbol{\Sigma}_y \mathbf{Y}_{N-l}) \\ &= \text{tr}(\boldsymbol{\Lambda}_{N-l}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pour que l'erreur  $\varepsilon^2$  soit minimale, il faut que les valeurs propres composant  $\boldsymbol{\Lambda}_{N-l}$  soient les plus petites possibles. Les vecteurs de  $\boldsymbol{\Phi}_{N-l}$  sont donc les vecteurs propres de  $\boldsymbol{\Sigma}_y$  correspondant aux plus petites valeurs propres. Par conséquent, il convient d'ordonner les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\boldsymbol{\Sigma}_y$  tel que  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_l > \dots > \lambda_N > 0$ . Ces valeurs propres sont les valeurs propres orthogonales – POV. Rappelons que notre objectif était de trouver la base optimale de  $l$  vecteurs permettant de satisfaire le problème (2.3). Cette base est  $\boldsymbol{\Phi}_m$  que nous noterons désormais  $\boldsymbol{\Phi}_m^*$ . Les vecteurs à choisir sont donc les vecteurs associés aux  $l$  plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance  $\boldsymbol{\Sigma}_y$ . Ainsi,  $\boldsymbol{\Phi}_m^* = [\boldsymbol{\Phi}_1^* \boldsymbol{\Phi}_2^* \dots \boldsymbol{\Phi}_l^*]$ . Ces vecteurs sont les POMs. Si nous ne devons retenir qu'un vecteur pour caractériser les données de  $\mathbf{Y}$ , se serait  $\boldsymbol{\Phi}_1^*$ . Si nous ne devons en retenir que deux, se seraient  $\boldsymbol{\Phi}_1^*$  et  $\boldsymbol{\Phi}_2^*$ , et ainsi de suite. Plus  $l$  est grand plus  $\varepsilon^2$  sera faible et plus la quantité  $\sum_{i=1}^l q_i \boldsymbol{\Phi}_i^*$  sera proche de  $\mathbf{y}$ . Le nombre de vecteur à retenir va dépendre de la précision voulue, mais la plupart des auteurs proposent de choisir les  $l$  premiers modes suivant un critère de coupure tels que

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i \geq \kappa, \quad (2.16)$$

avec le critère  $\kappa$  de l'ordre de 0,999.

Le calcul des POMs nécessite la construction de la matrice de covariance  $\boldsymbol{\Sigma}_y$ , puis le calcul des solutions propres de cette matrice. Cette matrice étant de taille  $N \times N$ , ceci peut être coûteux lorsque  $N$  est grand. Pour pallier à ce problème, Sirovitch [188] a proposé la méthode dite des « *snapshots* ». Les *snapshots* sont les  $m$  réponses échantillonnées  $\mathbf{y}_k$ . La méthode consiste à supposer que les POMs peuvent être représentés par une combinaison linéaire des échantillons, ce qui se traduit pour un POM  $\boldsymbol{\Phi}_i^*$  par

$$\boldsymbol{\Phi}_i^* = \sum_{k=1}^M \alpha_{k,i} \mathbf{y}_k = \mathbf{Y} \boldsymbol{\alpha}_i. \quad (2.17)$$

On peut alors montrer que les  $\boldsymbol{\alpha}_i$  sont les vecteurs propres de  $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$ , matrice  $m \times m$ . Ces vecteurs calculés, on en déduit les POMs. Comme en général  $m \ll N$ , le calcul est alors facilité. Pour être parfaitement justifié, l'utilisation de cette approche nécessite que les différentes réponses  $\mathbf{y}_k$  soient non-corrélées. C'est rarement le cas dans la pratique puisque des réponses à des pas de temps proches possèdent une degré de corrélation plus ou moins important. Malgré cela, l'utilisation de cette méthode même avec des réponses possédant de la corrélation donne de bons résultats.

Pour accélérer les calculs, il est plus intéressant d'utiliser la DVS de  $\mathbf{Y}$ . Comme nous l'avons fait remarquer en introduction, la DVS produit la décomposition orthogonale en

modes propres. L'énoncé traditionnel de la DVS consiste à considérer une matrice réelle ou complexe  $\mathbf{A}$  de taille  $a \times b$  et dire qu'il existe une factorisation de la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T. \quad (2.18)$$

Dans cette factorisation,  $\mathbf{U}$  est une matrice orthonormale  $a \times a$  dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs singuliers de gauche,  $\mathbf{V}$  est une matrice orthonormale  $b \times b$  dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs singuliers de droite et  $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice pseudo-diagonale  $a \times b$  dont les composantes diagonales sont les valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ .

Nous avons vu au paragraphe 1.3.1 que cette technique peut être utilisée dans le cas où  $\mathbf{A}$  est une base de vecteurs que l'on voudrait orthonormaliser. Lorsque  $\mathbf{A}$  est une matrice d'échantillonnage telle que  $\mathbf{Y}$ , il peut être montré [90, 92] que les vecteurs singuliers de gauche sont les POMs. Les POVs, quant à elles, sont les racines des valeurs singulières divisées par le nombre d'échantillons. Celles-ci étant au nombre de  $b$ , seuls les  $b$  premiers vecteurs de  $\mathbf{U}$  sont utiles et ils correspondent aux vecteurs obtenus par la méthode des *snapshots*. Depuis le premier algorithme proposé par Golub et Kahan en 1965 [64, 65], la DVS est largement implantée dans les environnement de développement numérique tel que Matlab® qui utilise les algorithmes de la librairie Fortran LAPACK [112].

Le moyen le plus rapide pour déterminer les POMs est donc d'effectuer une DVS de  $\mathbf{Y}$ .

Nous finirons ce paragraphe en abordant l'interprétation physique des POMs. Les réponses auxquelles nous nous intéressons dans ce travail sont des champs de déplacements mesurés en différents points d'une structure ou associés à un MEF. En dynamique des structures, l'interprétation des POMs a fait l'objet de plusieurs investigations [54, 90, 92]. En considérant les POMs comme les valeurs propres de la matrice de covariance, Feeny et Kappagantu [54] montrent que dans le cas d'un système libre linéaire sans amortissement ou avec amortissement modal et de matrice de masse proportionnelle à la matrice identité, les POMs convergent vers les modes propres de la structure. Kerschen et Golinval [90, 92] arrivent à la même conclusion en traitant le problème avec la DVS, et rajoutent que les premiers vecteurs propres singuliers de droite sont les modulations temporelles normalisées des modes propres. Ils montrent aussi que pour un système linéaire sans amortissement en réponse forcée, le premier POM capture la réponse forcée harmonique.

### 2.1.2 Adaptation à la sous-structuration

Une méthode de synthèse modale basée sur l'utilisation des POMs comme base de Ritz, est proposée dans [95]. Le problème est résolu en utilisant la méthode dans le domaine fréquentiel. Dans cette procédure, les modes optimaux sont extraits des réponses forcées fréquentielles de chaque sous-structure. La base obtenue permet alors de calculer les modèles réduits des sous-structures qui sont ensuite assemblés.

Soit  $\mathbf{y}(\omega)$  la réponse d'une sous-structure à la fréquence  $\omega$  obtenue par la résolution du système conservatif

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{y}(\omega) = \mathbf{f}(\omega). \quad (2.19)$$

Sur le domaine de fréquentiel utile  $[0 ; \Omega]$  de la structure complète,  $m$  réponses sont cal-

culées aux  $m$  fréquences  $\omega_1, \dots, \omega_m$  échantillonnées dans ce domaine. Ces réponses forment la matrice d'échantillonnage  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_1 \cdots \mathbf{y}_m]$ . À partir de cette matrice, sont extraits les POMs comme décrit précédemment. La base de réduction de la sous-structure est alors constituée par les  $l$  premiers POMs  $\boldsymbol{\phi}_i$ .

La relation de condensation de chaque sous-structure en coordonnées généralisées  $\mathbf{q}$  s'exprime par

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}_{\text{KL}} \mathbf{q}, \quad (2.20)$$

avec

$$\mathbf{T}_{\text{KL}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1^* & \cdots & \boldsymbol{\phi}_l^* \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_l^*, \quad l \ll m. \quad (2.21)$$

Nous avons choisi d'utiliser l'indice KL en référence à l'article [95] où la POD est désignée par méthode de Karhunen-Loève.

Dans le cas où la structure possède des modes de corps rigides, il convient de les inclure dans la base et alors

$$\mathbf{T}_{\text{KL}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_r^* & \boldsymbol{\Phi}_l^* \end{bmatrix} = \hat{\boldsymbol{\Phi}}_l^*. \quad (2.22)$$

Il n'existe pas de critère de sélection optimal *a priori* permettant de choisir le nombre de POMs à conserver. Un critère tel que celui présenté équation (2.16) peut par exemple être utilisé mais n'assure pas la précision fixée *a priori*. Kim suggère dans [95] de retenir un nombre de POMs égal au rang de la matrice de covariance  $\boldsymbol{\Sigma}_y$ , mais dans le cas où l'on utilise la DVS, cela oblige à calculer cette matrice. De plus, nos différentes applications n'ont pas confirmé la validité de ce critère.

### Calcul *a priori* des réponses des sous-structures

Cette méthode est non causale, c'est-à-dire que les modes ne peuvent être obtenus sans qu'une réponse ne soit connue *a priori* [94]. Pour cette raison, il est primordial d'échantillonner une réponse qui soit la plus représentative du système dynamique considéré. Dans cette méthode de sous-structuration, les forces de jonction étant inconnues, il est difficile de déterminer les différents chargements à appliquer aux jonctions de chaque sous-structure pour obtenir les réponses fréquentielles du système. Nous proposons ici deux approches permettant d'obtenir des réponses représentatives. La première [95] utilise une force d'excitation appelée la SCI pour *Single-Composite-Input*. Nous introduisons une deuxième technique tirant partie d'une analyse modale du système global.

### Excitation par la SCI

Pour un système dynamique linéaire soumis à plusieurs excitations – ici les efforts de réaction à l'interface en quantité égale au nombre de ddls de jonction –, Kim [96] a montré qu'il est possible de calculer la réponse à une fréquence pour seulement une excitation représentative, la SCI, au lieu de la calculer pour chaque excitation.

Pour une fréquence  $\omega_k$ , il est proposé d'utiliser [95] comme force d'excitation

$$\mathbf{f}(\omega_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_j(\omega_k) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

où le vecteur  $\mathbf{f}_j(\omega_k) \in \mathbb{R}^{j \times 1}$  est de la forme

$$\mathbf{f}_j(\omega_k) = \left[ \left| \frac{1}{i\omega_k - i\Omega_1} \right| \quad \left| \frac{1}{i\omega_k - i\Omega_2} \right| \quad \cdots \quad \left| \frac{1}{i\omega_k - i\Omega_j} \right| \right]^T \quad (i^2 = -1). \quad (2.24)$$

Les fréquences  $\Omega_k$  sont choisies arbitrairement dans la plage d'échantillonnage  $[0 ; \Omega]$  mais telles que  $\Omega_k \neq \omega_k$ .

### Utilisation des réponses globales

Le but de la synthèse modale est évidemment d'éviter de réanalyser de la structure complète. Cependant, nous nous plaçons plutôt dans l'optique d'obtenir une base de condensation du système nominal et ensuite d'effectuer des réanalyses approchées à partir de cette base. Dans ce cas, il paraît raisonnable de supposer que l'analyse modale du système global de référence ait été réalisée. Si les fréquences et vecteurs propres du système global sont disponibles, nous proposons de calculer dans un premier lieu les réponses forcées pour le MEF de la structure complète. Ce calcul est effectué avec les matrices réduites à l'aide d'une base modale tronquée de la structure comme décrit section 1.1.

L'excitation porte donc sur tous les ddls du MEF. Si  $m$  modes normaux sont calculés, la réponse forcée de la structure complète est calculée pour des forces unitaires à chaque fréquence  $\omega_k$  selon

$$\mathbf{y}^{(g)}(\omega_k) = \mathbf{\Phi}_m^{(g)} \left( \mathbf{\Lambda}_m^{(g)} - \omega_k^2 \mathbf{I}_{mm} \right)^{-1} \mathbf{\Phi}_m^{(g)T} \mathbf{I}_{N1}. \quad (2.25)$$

Pour une sous-structure, la réponse constituant la  $k^e$  colonne de la matrice d'échantillonnage  $\mathbf{Y}$  sera la restriction de  $\mathbf{y}^{(g)}$  aux ddls de cette sous-structure. Ce processus inverse permet de s'affranchir du problème consistant à déterminer un vecteur de forces proches des forces réelles d'interface.

Après adaptation, ce type de substitution peut aussi s'appliquer aux autres méthodes de synthèse modale. Par exemple, pour la méthode de Martinez, il suffit de remplacer les modes normaux à interface libre  $\mathbf{\Phi}_k^e$  par la restriction des modes normaux de la structure complète aux ddls des sous-structures. Pour Craig-Bampton, la structure complète doit être analysée avec tous les ddls de jonctions fixés.

Avec cette approche, l'analyse modale de la structure est nécessaire. Rappelons encore une fois que nous proposons ce type de méthode uniquement dans le cas où l'on envisage la réanalyse de la structure. En ce concerne qui la POD, si cette analyse complète n'est pas possible, il peut convenir d'employer l'approche proposée par Kim. Le calcul des réponses nécessite alors l'utilisation d'une boucle de  $m$  itérations, et ce, pour chaque sous-structure. Au final, pour des sous-ensembles de tailles importantes, le calcul s'avère plus coûteux. Comme nous le verrons dans la première application, les résultats sont aussi moins précis.

Une autre approche consiste à réaliser l'analyse avec une méthode classique telle que par exemple Craig-Bampton ou Martinez, puis d'utiliser la base modale du modèle complet obtenue après restitution pour calculer les réponses comme indiqué équation (2.25). Avec cette dernière approche, nous verrons dans les applications suivantes que la précision des modes est égale à celle de la méthode d'origine.

## Assemblage des sous-structures

Lors de nos investigations, nous nous sommes aperçus que la qualité des résultats finaux dépend fortement de la méthode d'assemblage utilisée. Nous proposons ici deux alternatives possédant chacune ses avantages et ses inconvénients. Nous présentons également une méthode de condensation que nous qualifierons d'hybride.

### Assemblage explicite et méthode hybride

Nous avons évoqué au paragraphe 1.2.3 que l'assemblage explicite sur les ddls de jonction permet une mise en oeuvre numérique aisée de l'assemblage. Nous utilisons cette approche pour coupler les sous-structures obtenues par la condensation à l'aide de la base  $\mathbf{T}_{KL}$ . Pour cela, cette base de réduction doit subir une transformation. En partitionnant selon les ddls maîtres  $m$ , contenant les ddls de jonctions et certains ddls internes dont on souhaite conserver le sens physique, et les ddls esclaves  $s$  complémentaires, nous avons

$$\mathbf{T}_{KL} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{ml}^* \\ \hat{\Phi}_{sl}^* \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

On ne confondra pas le  $m$  des ddls maîtres avec le  $m$  du nombre de réponses échantillonnées.

Afin de pouvoir assembler explicitement sur les ddls de jonctions, nous utilisons cette matrice pour obtenir la nouvelle relation de passage

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} \\ \hat{\Phi}_{sl}^* \hat{\Phi}_{ml}^{*\dagger} \end{bmatrix} \mathbf{y}_m. \quad (2.27)$$

L'exposant  $^\dagger$  désigne la pseudo-inverse de Moore-Penrose. Cette notation est utilisée dans le cas où  $m < l$ . Lorsque  $m = l$ ,  $\hat{\Phi}_{ml}^{*\dagger}$  devient  $\hat{\Phi}_{ml}^{*-1}$ . Le cas  $m > l$  est à éviter car alors  $\hat{\Phi}_{ml}^*$  n'est pas de rang maximum, contrairement aux deux autres cas. On retrouve cette approche dans [35], où les modes normaux des sous-structures sont utilisés. Bien que potentiellement intéressante, l'application de cette technique sur différentes structures a conduit à des matrices condensées non définies positives ou très mal conditionnées. L'extraction finale des valeurs propres est alors compromise. Nous optons donc pour une méthode hybride s'inspirant de la méthode de Martinez.

À partir des modes d'attache de  $\mathbf{S}_m$  et de la base  $\hat{\Phi}_l^*$  des POMs contenant éventuellement les modes de corps rigide, nous partons de la relation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{mm} & \hat{\Phi}_{ml}^* \\ \mathbf{S}_{sm} & \hat{\Phi}_{sl}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_m \\ \mathbf{q}_{r+l} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Il n'est pas nécessaire de considérer les modes d'attaches résiduels puisqu'aucun mode normal n'est pris en compte pour compléter la base. Les coordonnées de type efforts du vecteur  $\hat{\mathbf{f}}_m$  sont éliminées au profit des coordonnées  $\mathbf{y}_m$  afin d'obtenir une matrice de transforma-

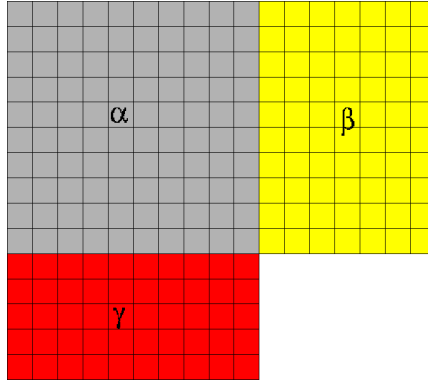
tion  $\mathbf{T}_{\text{MKL}}$  utilisée dans la relation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{y}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{mm} & 0 \\ \mathbf{S}_{sm} \mathbf{S}_{mm}^{-1} & \hat{\mathbf{\Phi}}_{sl}^* - \mathbf{S}_{sm} \mathbf{R}_{mm}^{-1} \hat{\mathbf{\Phi}}_{ml}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{q}_{r+l} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\text{MKL}} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_m \\ \mathbf{q}_{r+l} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Après cette transformation, l'assemblage devient alors élémentaire.

### Assemblage par couplage global

La méthode d'assemblage proposée par Kim [95] consiste à employer une matrice de couplage globale. Pour illustrer cette approche, considérons le système représenté figure 2.1.



**Fig. 2.1** – Assemblage de trois sous-structures

Le système est composé de trois sous-structures notées  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  de vecteurs déplacement  $\mathbf{y}^\alpha$ ,  $\mathbf{y}^\beta$ ,  $\mathbf{y}^\gamma$ . Nous considérons que les ddls maîtres se réduisent aux ddls de jonctions, nous avons donc  $m = j$ . Les sous-structures  $\beta$  et  $\gamma$  possèdent des ddls communs avec  $\alpha$ . Ces ddls d'interface sont notés respectivement  $j_{\alpha\beta}$  et  $j_{\alpha\gamma}$ . Selon les contraintes définies paragraphe 1.2.3, nous avons

$$\mathbf{y}_{j_{\alpha\beta}}^\alpha = \mathbf{y}_{j_{\alpha\beta}}^\beta \quad \text{et} \quad \mathbf{y}_{j_{\alpha\gamma}}^\alpha = \mathbf{y}_{j_{\alpha\gamma}}^\gamma. \quad (2.30)$$

À partir de la relation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}^\alpha \\ \mathbf{y}^\beta \\ \mathbf{y}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{j_{\alpha\beta}}^\alpha \\ \mathbf{y}_{j_{\alpha\gamma}}^\alpha \\ \mathbf{y}_{i_\alpha}^\alpha \\ \mathbf{y}_{j_{\alpha\beta}}^\beta \\ \mathbf{y}_{i_\beta}^\beta \\ \mathbf{y}_{j_{\alpha\gamma}}^\gamma \\ \mathbf{y}_{i_\gamma}^\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{j_{\alpha\beta}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{j_{\alpha\gamma}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I}_{i_\alpha} & 0 & 0 \\ \mathbf{I}_{j_{\alpha\beta}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{i_\beta} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{j_{\alpha\gamma}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_{i_\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{j_{\alpha\beta}}^\alpha \\ \mathbf{y}_{j_{\alpha\gamma}}^\alpha \\ \mathbf{y}_{i_\alpha}^\alpha \\ \mathbf{y}_{i_\beta}^\beta \\ \mathbf{y}_{i_\gamma}^\gamma \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

la relation de couplage globale s'exprime par

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}^\alpha \\ \mathbf{y}^\beta \\ \mathbf{y}^\gamma \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\text{KL}}^{(g)} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\alpha \\ \mathbf{q}^\beta \\ \mathbf{q}^\gamma \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

avec

$$\mathbf{T}_{\text{KL}}^{(g)} = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{j_{\alpha\beta}}^{*\alpha} & 0 & 0 \\ \hat{\Phi}_{j_{\alpha\gamma}}^{*\alpha} & 0 & 0 \\ \hat{\Phi}_{i_{\alpha}}^{*\alpha} & 0 & 0 \\ \hat{\Phi}_{j_{\alpha\beta}}^{*\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Phi}_{i_{\beta}}^{*\beta} & 0 \\ \hat{\Phi}_{j_{\alpha\gamma}}^{*\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\Phi}_{i_{\gamma}}^{*\gamma} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Soient  $\mathbf{K}^\alpha$ ,  $\mathbf{K}^\beta$  et  $\mathbf{K}^\gamma$  les matrices de raideur des sous-structures et  $\mathbf{M}^\alpha$ ,  $\mathbf{M}^\beta$  et  $\mathbf{M}^\gamma$  leurs matrices de masse. Les matrices condensées de raideur et de masse du système global se calculent alors par

$$\mathbf{K}^c = \mathbf{T}_{\text{KL}}^{(g)\text{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}^\gamma \end{bmatrix} \mathbf{T}_{\text{KL}}^{(g)} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}^c = \mathbf{T}_{\text{KL}}^{(g)\text{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^\beta & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^\gamma \end{bmatrix} \mathbf{T}_{\text{KL}}^{(g)}. \quad (2.34)$$

Avec cette approche, nous pouvons nous affranchir complètement du nombre de ddls de jonction. Les matrices condensées finales sont alors en général de tailles plus petites que celles obtenues par la méthode hybride proposée. De plus, les résultats sont plus précis. L'inconvénient majeur est qu'elle nécessite des multiplications de matrices pouvant être de tailles importantes et impliquant l'emploi d'un ordinateur aux ressources mémoires suffisantes.

### Condensation robuste

Nous finirons cette présentation de l'utilisation des POMs en synthèse modale par son application en condensation robuste. La robustesse est définie ici au sens de robustesse vis-à-vis des modifications structurales.

Dans cette méthode, pour chaque sous-structure, nous disposons à la suite du calcul des POMs du système initial, de  $m$  réponses  $\mathbf{y}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{y}_m^{(0)}$  aux  $m$  fréquences  $\omega_1, \dots, \omega_m$ .

Nous pouvons donc tout simplement réutiliser l'équation (1.50) pour déterminer la base de force  $\mathbf{F}_\Delta$ . Pour chaque fréquence  $\omega_k$ , nous calculons

$$\mathbf{f}_{\Delta_k} = -(\Delta\mathbf{K} - \omega_k^2 \Delta\mathbf{M}) \mathbf{y}^{(0)}(\omega_k). \quad (2.35)$$

Ensuite, la concaténation des  $\mathbf{f}_{\Delta_k}$  nous permet d'obtenir la base de forces  $\mathbf{F}_\Delta$

$$\mathbf{F}_\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\Delta_1} & \cdots & \mathbf{f}_{\Delta_M} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Les résidus  $\mathbf{R}_\Delta$  associés aux forces de modifications sont ensuite calculés suivant l'équa-



tion (1.54) et ajoutés à la base de condensation initiale pour obtenir la base de transformation enrichie robuste  $\mathbf{T}_{\text{MKLE}}$  ou  $\mathbf{T}_{\text{KLE}}$ .

### 2.1.3 Applications

La méthode proposée est illustrée sur deux applications. Dans la première, nous utilisons une structure de type plaque raidie par un profilé en U dont le MEF comporte 3 240 ddls. Dans la deuxième, nous utilisons un modèle de rotor d'avion à 39 330 ddls. La condensation Karhunen-Loève sera appliquée sur les modèles initiaux et modifiés. Les modifications structurales introduites concernent des perturbations locales en masse et en raideur. Pour valider l'efficacité de la procédure, nous comparerons les résultats avec ceux obtenus par la méthode de Craig-Bampton ou de Martinez. Dans le cas de la première application, nous utiliserons également les méthodes de MacNeal [127] et de Rubin [170], méthodes utilisant les modes d'attaches résiduels. Le couplage est ici réalisé par élimination des efforts de liaison résiduels. L'assemblage associé à ces approches étant difficile à systématiser, celles-ci ne seront pas utilisées pour la deuxième application.

#### Structure académique

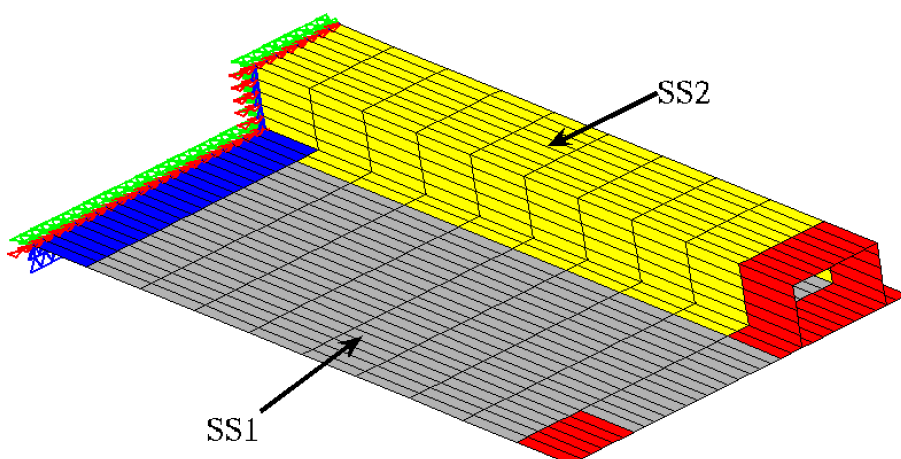


Fig. 2.2 – Plaque raidie par un profilé en U

**Condensation déterministe** Nous nous intéressons à une plaque raidie par un profilé en U représentée figure 2.2. La plaque constitue la sous-structure SS1 et le profilé en U la sous-structure SS2. Les deux sous-structures sont encastrées à leur base commune. La structure est modélisée par 120 éléments coques à 6 ddls par noeuds représentant un total de 3 420 ddls actifs répartis en 1 980 ddls actifs pour SS1, 1 380 pour SS2 et 120 ddls de jonction. La bande fréquentielle d'intérêt est  $[0 ; 900 \text{ Hz}]$ . La fréquence utile est donc  $f_u = 900 \text{ Hz}$ . Dans cette bande, le modèle de référence possède 61 solutions propres.

Les solutions obtenues par six méthodes de synthèse modale sont comparées aux solutions du modèle exact. Les critères choisis sont les erreurs relatives sur les fréquences propres  $\epsilon_f$  et sur les vecteurs propres  $\epsilon_y$ . Ces erreurs sont définies en annexe A. Parmi les six méthodes, quatre techniques classiques sont utilisées, à savoir les méthodes de Craig-Bampton (CB), de Martinez (MA), de MacNeal (MN) et de Rubin (R), utilisant respectivement les matrices de transformation  $\mathbf{T}_{\text{CB}}$ ,  $\mathbf{T}_{\text{MA}}$ ,  $\mathbf{T}_{\text{MN}}$  et  $\mathbf{T}_{\text{R}}$ . Ces deux dernières, dont on trouvera le

principe dans [127, 170], emploient les modes normaux à interface libre et les modes d'attache résiduels, la méthode de Rubin se différenciant par l'ajout d'un résidu dynamique aux modes d'attache. Elles permettent d'obtenir un modèle condensé final exempt de coordonnées associées aux ddl de jonction.

Suivant la méthode, il est nécessaire de fixer le nombre de modes normaux à interface fixe ou libre à conserver. Pour cela nous utilisons un critère de fréquence de coupure. Pour chaque sous-structure, le nombre de modes retenus est égal au nombre de modes à interface libre dont la fréquence maximale est inférieure ou égale à  $2 \times f_u$ . Le récapitulatif de la composition des bases de réduction de chaque sous-structure et de chaque méthode est fourni tableau 2.1.

Les deux autres méthodes sont les réductions utilisant la POD. La première est la méthode hybride de base de condensation  $\mathbf{T}_{\text{MKL}}$ . La deuxième combine les bases  $\mathbf{T}_{\text{KL}}$  pour construire la base de condensation et couplage globale  $\mathbf{T}_{\text{KL}}^{(g)}$ . Pour chaque sous-structure, les POMs ont été calculés à partir de 200 réponses obtenues à partir des réponses globales de la structure complète. Ces dernières sont obtenues à partir d'une base modale contenant les 61 modes couvrant le domaine [0 ; 900 Hz]. On se reportera au tableau 2.1 pour le nombre de POMs retenus.

Les résultats obtenus sont présentés figures 2.3 et 2.4 et dans le tableau 2.2. Nous reviendrons plus loin sur la signification des courbes correspondant à la légende KLsci. Nous constatons que les méthodes classiques donnent de bons résultats, mais ceux-ci se dégradent clairement à mesure que la fréquence augmente, contrairement aux méthodes utilisant les POMs. En ce qui concerne les erreurs sur les vecteurs propres, les quatre méthodes finissent par dépasser 1 %, avec des erreurs allant jusqu'à 66 % pour MN. Les méthodes MA et R donnent des résultats à peu près équivalents qui sont donc difficilement dissociables sur les figures. À taille égale, la méthode hybride donne des résultats bien meilleurs que pour CB et MA. Malgré un modèle réduit de 124 ddl, le couplage direct KL conduit à des résultats très supérieurs. Dans le cas de la méthode hybride, les résultats sont du même ordre que ceux de la méthode MA ou R. Cependant, le modèle est de taille inférieure. En prenant 99 POMs pour SS1 et 56 pour SS2 afin d'obtenir un modèle réduit comparable à celui obtenu avec la méthode MA, l'erreur moyenne sur les fréquences passe à  $1,7 \times 10^{-4}$  % et celle sur les vecteurs à  $3,35 \times 10^{-2}$  %.

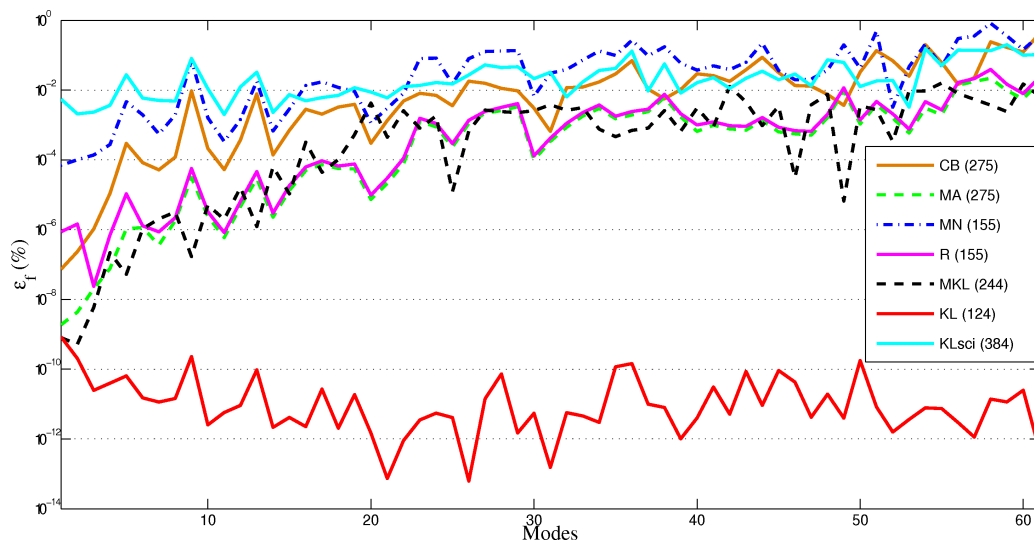
Considérons désormais l'approche la plus performante, à savoir la technique utilisant la base  $\mathbf{T}_{\text{KL}}$ . Nous allons discuter des différents aspects spécifiques à cette méthode.

Pour l'obtention des POMs il est nécessaire de calculer  $m$  réponses approchées – ou exactes si le système le permet – de la structure complète. Le premier problème est donc de fixer *a priori* le nombre  $m$ . Nous ne proposerons pas de critère pour ce choix, mais seulement des indications. On remarquera que pour un sous-ensemble, le nombre maximal de POMs calculable est  $m$ . La taille des sous-structures à condenser peut donc donner une idée d'un nombre minimum. Dans notre application, 200 réponses ont été calculées. Pour un nombre de modes fixé à 62 pour SS1 et SS2, la figure 2.5 montre l'évolution des erreurs moyennes en fonction de  $m$ . Il apparaît qu'à partir d'une centaine d'échantillon, les erreurs ne diminuent plus beaucoup. Il est difficile de généraliser, mais nous pensons qu'il est inutile de calculer un grand nombre de réponses. Un maximum de quelques centaines est en général nécessaire pour obtenir une bonne précision.

Une fois les POMs extraits, se pose la sempiternelle question, combien de modes faut-il

**Tab. 2.1** – Composition des bases de condensation de la plaque raidie (ddls)

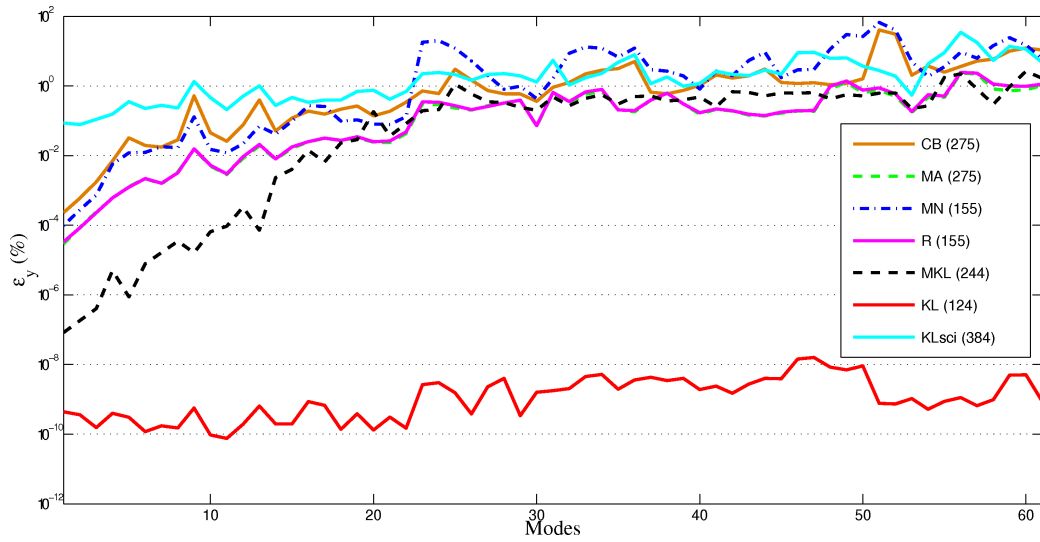
	$T_{CB}$	$T_{MA}$	$T_{MN}$	$T_R$	$T_{MKL}$	$T_{KL}$
SS1						
Modes contraints	120	-	-	-	-	-
Modes d'attache résiduels	-	120	120	120	-	-
Modes d'attache	-	-	-	-	120	-
Modes à interface fixe	99	-	-	-	-	-
Modes à interface libre	-	99	-	-	-	-
POMs	-	-	-	-	62	62
SS2						
Modes contraints	120	-	-	-	-	-
Modes d'attache résiduels	-	120	120	120	-	-
Modes d'attache	-	-	-	-	120	-
Modes à interface fixe	56	-	-	-	-	-
Modes à interface libre	-	56	-	-	-	-
POMs	-	-	-	-	62	62
Taille du modèle réduit	275	275	155	155	244	124


**Fig. 2.3** – Erreurs relatives sur les fréquences propres de la plaque raidie pour différentes méthodes de synthèse modale

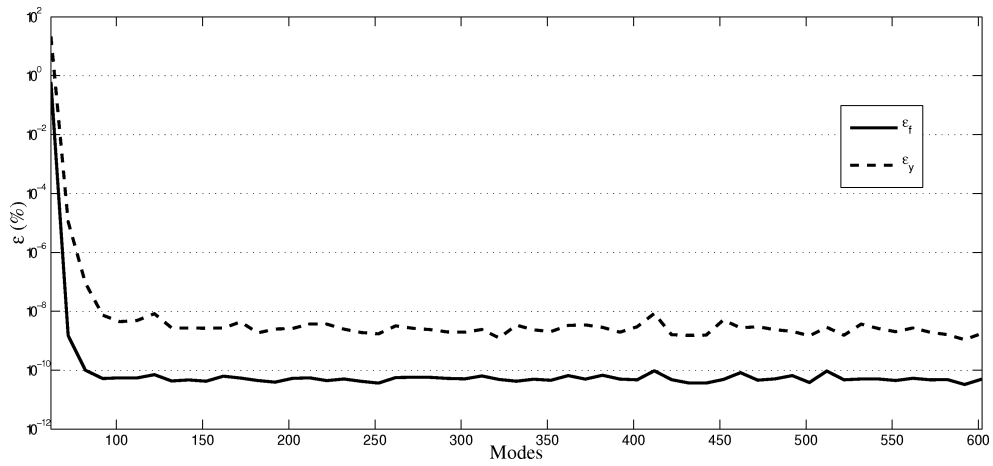
**Tab. 2.2** – Erreurs relatives moyennes de la plaque raidie

	$T_{CB}$	$T_{MA}$	$T_{MN}$	$T_R$	$T_{MKL}$	$T_{KL}$
$\bar{\epsilon}_f$ (%)	$3,37 \times 10^{-2}$	$2,41 \times 10^{-3}$	$9,33 \times 10^{-2}$	$3,27 \times 10^{-3}$	$2,25 \times 10^{-3}$	$4,21 \times 10^{-11}$
$\bar{\epsilon}_y$ (%)	2,82	0,34	6,71	0,37	0,41	$2,32 \times 10^{-9}$

conserver ? Pour les méthodes classiques, un critère de fréquence de coupure est utilisé la plupart du temps. Dans le cas des POMs, rappelons que les vecteurs retenus sont souvent les



**Fig. 2.4** – Erreurs relatives sur les vecteurs propres de la plaque raidie pour différentes méthodes de synthèse modale



**Fig. 2.5** – Évolution des erreurs relatives sur les fréquences et vecteurs propres de la plaque raidie en fonction du nombre de réponses

$l$  premiers modes tels que

$$\sum_{i=1}^l \lambda_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i \geq \kappa.$$

Quelle valeur donner à  $\kappa$  ? Le tableau 2.3 contient les valeurs des erreurs moyennes obtenues en fonction de  $\kappa$ . Nous constatons que dès  $\kappa = 0,9999$  les résultats sont excellents. La valeur  $\kappa = 0,9999$  semble être un bon seuil pour donner une estimation raisonnable du nombre de modes à conserver. Si la précision n'est pas satisfaisante, il suffit d'augmenter  $\kappa$  d'un « 9 ».

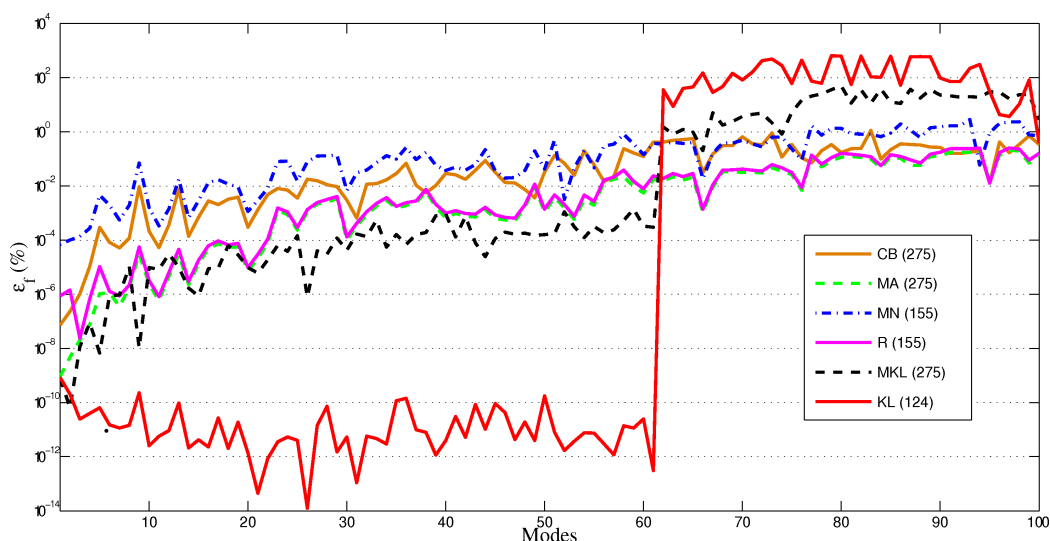
Nous avons vu au paragraphe 2.1.2 que nous pouvons calculer les réponses des sous-structures de deux façons. Dans notre application, nous avons utilisé l'approche consistant à partir des réponses approchées du système global. Nous pouvons constater que les résultats sont excellents. Cette analyse requiert les fréquences et vecteurs sur la bande d'analyse ou au-delà. Si ces données ne sont pas disponibles, l'autre approche est d'utiliser la SCI pour calculer les réponses de chaque sous-structure. Sur les figures 2.3 et 2.4, les courbes correspondant à la légende KLsci ont été obtenues avec cette méthode. En considérant les POMs tels que  $\kappa = 0,9999$ , 197 modes pour SS1 et 187 pour SS2 ont été utilisés. Malgré un modèle

**Tab. 2.3** – Erreurs relatives moyennes de la plaque raidie en fonction du nombre de modes retenus

	$\kappa = 0,999$	$\kappa \geq 0,9999$
POMs SS1	61	62
POMs SS2	59	62
$\bar{\epsilon}_f$	$3,40 \times 10^{-5}$	$4,21 \times 10^{-11}$
$\bar{\epsilon}_y$	$1,07 \times 10^{-2}$	$2,32 \times 10^{-9}$

à 384 ddls, les résultats sont moins bons qu’avec l’autre approche. L’utilisation de la SCI peut cependant donner de bons résultats sur une bande fréquentielle comportant peu de modes.

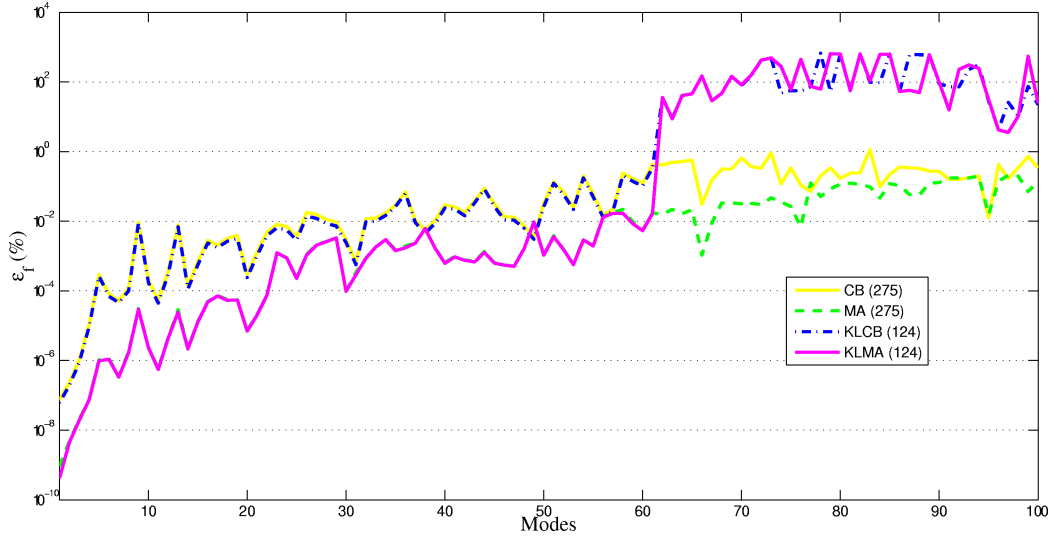
Les réponses ont été calculées sur [0 ; 900 Hz]. Avec les mêmes bases, les solutions ont été recalculées sur [0 ; 1 400 Hz]. La figure 2.6 représente l’évolution des erreurs sur les fréquences propres pour les différentes méthodes. Il apparaît clairement que le domaine de validité de la méthode KL est strictement limité au domaine d’échantillonnage des réponses. La dégradation est moins brutale pour la méthode hybride, mais elle est tout de même importante. Les POMs sont optimaux seulement sur la bande fréquentielle où ils ont été calculés. Avant de réaliser l’analyse, il est donc primordial de déterminer précisément son domaine d’intérêt.



**Fig. 2.6** – Erreurs relatives sur les fréquences propres de la plaque raidie sur [0 ; 1400 Hz]

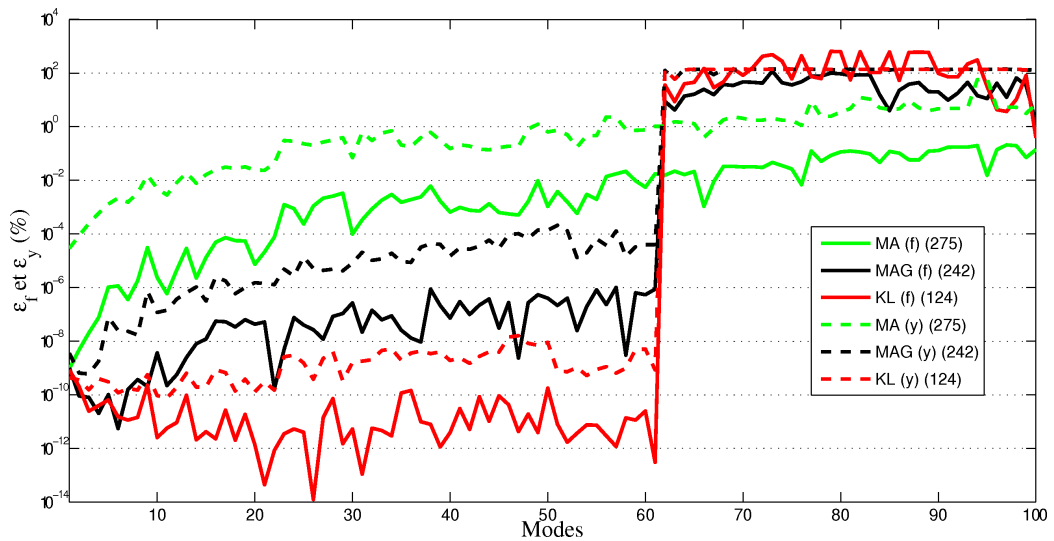
Comme évoqué paragraphe 2.1.2, il est envisageable de calculer les réponses de la structure globale avec les modes obtenus par une autre méthode de réduction. Prenons par exemple les solutions propres du modèle réduit par les méthodes CB et MA. Étendons les bases modales à l’ensemble des ddls pour obtenir  $\tilde{\Phi}_m^{(g)}$  approximation de  $\Phi_m^{(g)}$ . Les réponses approchées de l’équation (2.25) sont calculées avec les  $\tilde{\Phi}_m^{(g)}$  des deux méthodes puis les POMs sont déterminés. La figure 2.7 représente l’évolution des erreurs sur les fréquences propres sur [0 ; 1 400 Hz] pour CB, MA, KL à partir des solutions de CB (KLCB) et KL à partir de MA (KLMA). Le nombre de modes constituant les bases est toujours le même. Jusqu’au mode 61, les solutions de KLCB et CB sont confondues, de même pour KLMA et MA. Au-delà, c’est-à-dire après le domaine d’échantillonnage, la dégradation de KLCB et KLMA est la même que celle observée sur la figure 2.6 pour KL. Sur le domaine utile, les bases de réduction de

KLCB et KLMA ont l'avantage d'être plus petites. Il est apparemment possible avec les POMs de réduire la taille des bases de réduction de n'importe quelle méthode sans en altérer la précision.



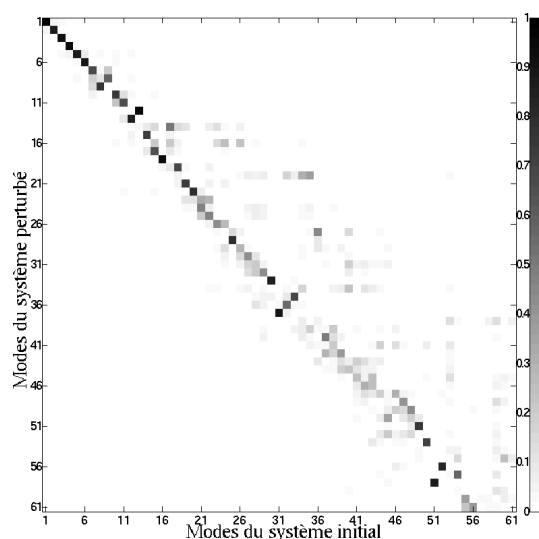
**Fig. 2.7** – Erreurs relatives sur les fréquences propres de la plaque raidie pour CB, MA, KLCB et KLMA

Les bases de réduction de KL sont obtenues à partir des modes exacts de la structure complète. Il est possible d'utiliser ces solutions pour d'autre méthodes de synthèse modale. Nous nous intéressons ici à la méthode de Martinez. Les modes normaux à interface libre  $\Phi_k^e$  sont remplacés par la restriction des modes normaux de la structure complète aux ddls des sous-structures. Nous noterons cette approche MAG. Nous utilisons les 61 premiers modes propres. Les bases de réduction MAG de SS1 et SS2 contiennent donc 61 modes restreints. Nous avons reporté sur la figure 2.8 les erreurs sur les fréquences en traits continus et les erreurs sur les vecteurs propres en traits interrompus pour MA, MAG et KL. Sur le domaine utile, MAG est plus précis que MA mais se dégrade rapidement en dehors. La méthode KL reste cependant plus précise.



**Fig. 2.8** – Erreurs relatives sur les fréquences et vecteurs propres de la plaque raidie pour MA, MAG, KL

**Condensation robuste** Nous introduisons désormais des perturbations localisées concernant la masse volumique et le module d'Young. La zone de SS1 perturbée en raideur est indiquée en bleu sur la figure 2.2 et les zones de SS1 et SS2 perturbées en masse sont indiquées en rouge. Les zones en rouge voient leur module d'Young passer de  $2,1 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$  à  $1,05 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$ , soit une variation de 50 %. La masse volumique de la zone bleue passe de  $7\,800 \text{ kg.m}^{-3}$  à  $23\,400 \text{ kg.m}^{-3}$ , soit une variation de 200 %. Ces variations ne sont pas justifiées mais ont pour but d'évaluer l'efficacité de notre approche. La matrice de MAC de la figure 2.9 montre l'impact des modifications introduites. Nous constatons qu'au-delà des six premiers modes les distances en forme sur les 61 premiers modes sont assez importantes. Les 61 modes du système perturbé couvrent désormais le domaine  $[0 ; 800 \text{ Hz}]$ . Nous considérons dans ce paragraphe les méthodes CB, MA, MKL et KL. Les bases de réduction du modèle initial sont enrichies par des résidus tel que décrits aux paragraphes 1.3.1 et 2.1.2 pour obtenir les bases de réduction enrichies  $\mathbf{T}_{\text{CBE}}$ ,  $\mathbf{T}_{\text{MAE}}$ ,  $\mathbf{T}_{\text{MKLE}}$  et  $\mathbf{T}_{\text{KLE}}$ . Pour choisir le nombre de résidus à utiliser pour chaque sous-structure, nous utilisons le critère  $\sum_{i=1}^l \sigma_i / \sum_{i=1}^m \sigma_i \geq \kappa$ , avec  $\sigma_i$  les valeurs singulières de la DVS.  $\kappa = 0,9999$  pour CB et MA, pour MKL et KL  $\kappa = 0,99999$ . Les valeurs choisies sont reportées tableau 2.4. Sur les figures 2.10 et 2.11, sont représentées en traits interrompus les erreurs obtenues avec les bases enrichies. Ces dernières sont comparées à des bases de réduction du modèle non-perturbé dont le nombre de vecteurs est égal à ceux des bases enrichies. À tailles identiques, nous constatons que les bases enrichies conduisent aux meilleurs résultats. Ici, la méthode KLE ne se démarque plus des autres méthodes. Cependant, avec une précision acceptable, la taille du modèle réduit correspondant est moins importante que pour les autres méthodes. MKLE donne de meilleurs résultats mais le modèle réduit est plus important. Pour ces deux méthodes, les bases non-enrichies sont moins précises que pour les méthodes CB et MA. Il apparaît donc que les méthodes KL et MKL soient moins robustes que CB et MA. Malgré tout, l'enrichissement avec des résidus permet d'obtenir des résultats convenables.

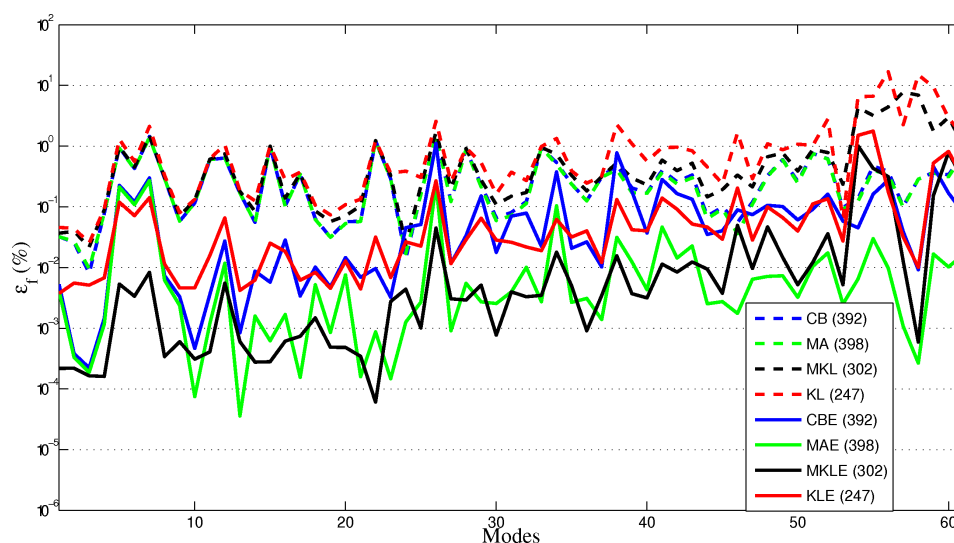
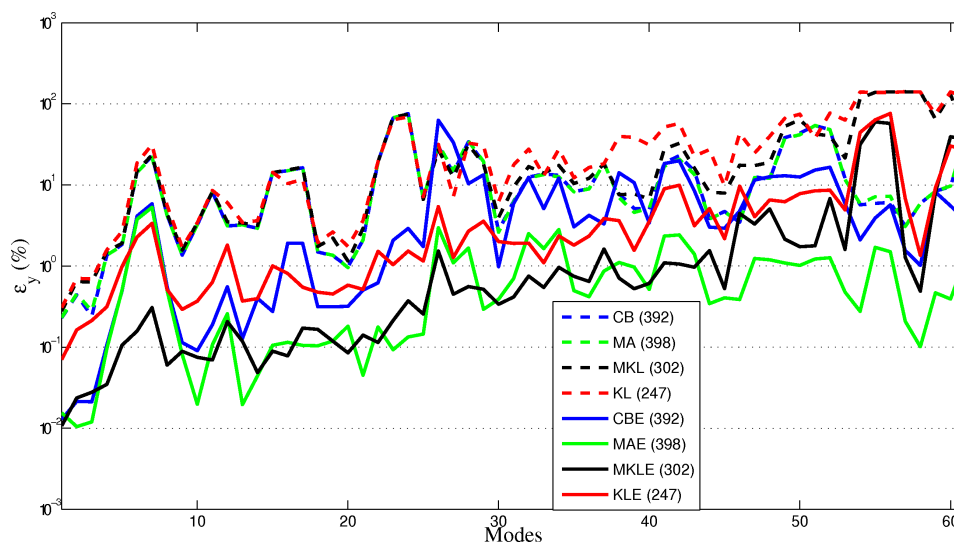


**Fig. 2.9** – Matrice de MAC entre les modes du modèle initial de la plaque raidie et ceux du modèle perturbé

Pour la condensation déterministe, nous avons formé les bases de réduction  $\mathbf{T}_{\text{KLMB}}$  et  $\mathbf{T}_{\text{KLMA}}$ , bases calculées à partir des réponses de la structure globale déterminées avec les modes obtenus par les méthodes CB et MA. L'évolution des erreurs sur les vecteurs propres

**Tab. 2.4** – Composition des bases de condensation enrichies de la plaque raidie (ddls)

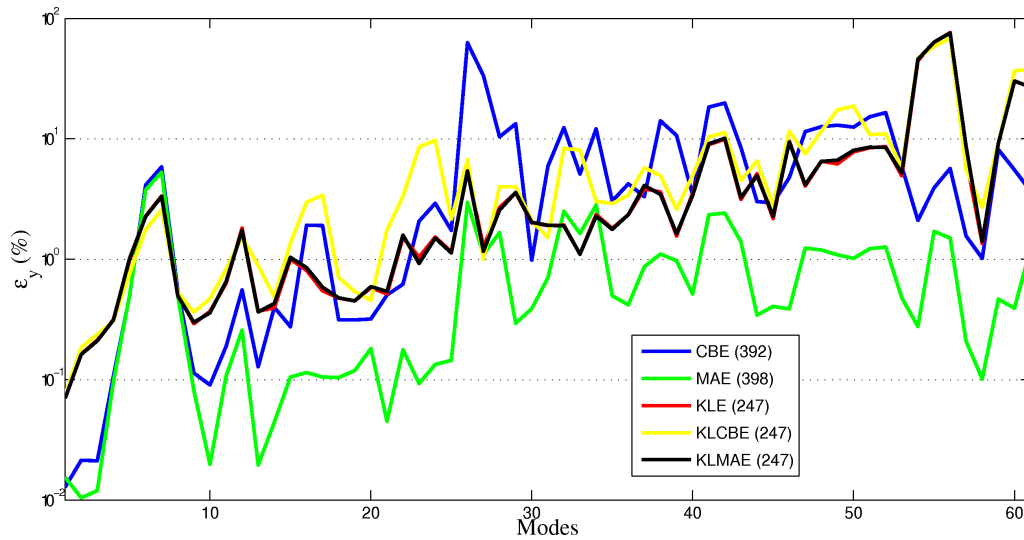
	$T_{CBE}$	$T_{MAE}$	$T_{MKLE}$	$T_{KLE}$
SS1				
Vecteurs initiaux	219	219	182	62
Vecteurs résiduels	60	53	24	53
SS2				
Vecteurs initiaux	176	176	182	62
Vecteurs résiduels	57	70	34	70
Taille du modèle réduit	392	398	302	247

**Fig. 2.10** – Erreurs relatives sur les fréquences propres de la plaque raidie avec les bases initiales et robustes**Fig. 2.11** – Erreurs relatives sur les vecteurs propres de la plaque raidie avec les bases initiales et robustes

pour CBE, MAE, KLE, KLCBE et KLMAE est représentée figure 2.12. Pour un nombre égal de résidus, les erreurs obtenues pour KLCBE et KLMAE sont très proches de celles de KLE,



voire égales pour KLE et KLCBE. Il est donc intéressant de noter que contrairement au cas déterministe, utiliser cette approche ne dégrade pas les résultats. Là encore, les bases de réduction de KLCBE et KLMAE sont plus petites que pour CBE et MAE. La méthode MAE est cependant plus précise.

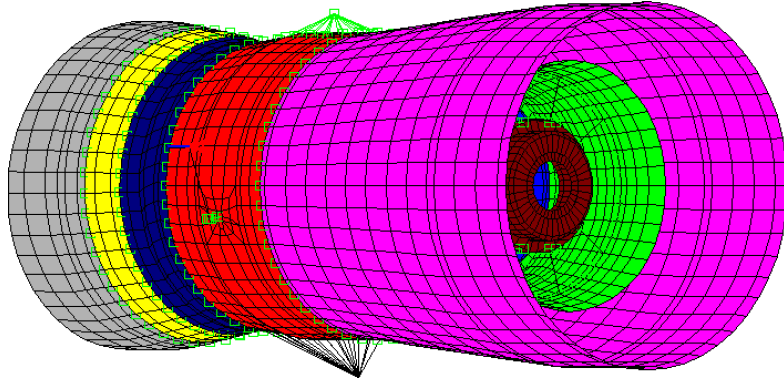


**Fig. 2.12** – Erreurs relatives sur les vecteurs propres de la plaque raidie pour CBE, MAE, KLE, KLCBE et KLMAE

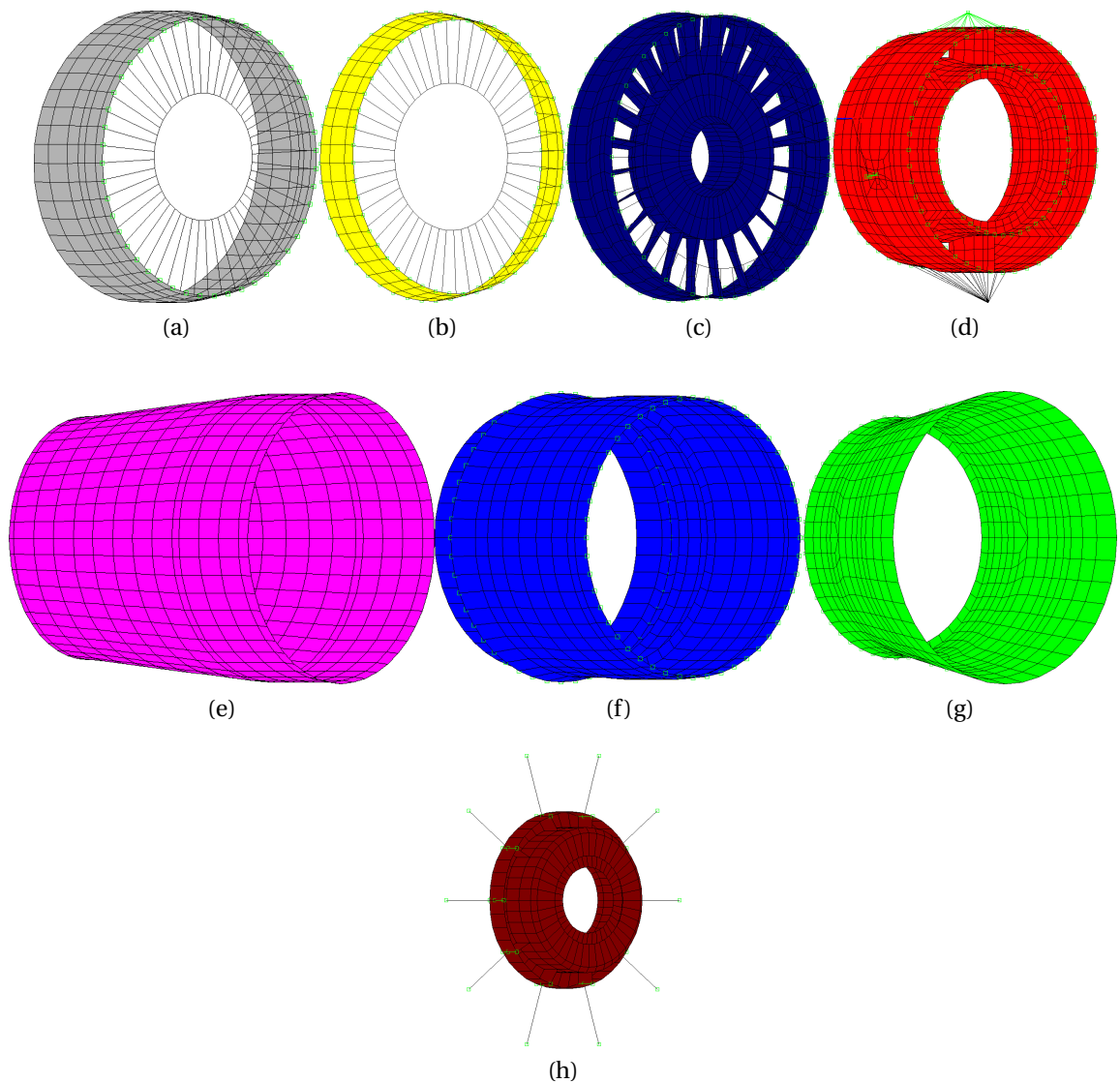
## Structure industrielle

**Condensation déterministe** La structure présentée figure 2.13 est un moteur d'avion en condition limite libre-libre. Ce modèle à 39 330 ddls actifs est essentiellement constitué d'éléments coques à quatre noeuds et d'éléments poutres. Le système est divisée en huit sous-structures indiquées par les zones colorées sur la figure 2.13 et détaillées figure 2.14. Dans le détail, la sous-structure SS1 comporte 2 604 ddls dont 288 communs avec SS2, SS2 comporte 1 740 ddls dont 288 communs avec SS1 et 288 avec SS3, SS3 comporte 8 070 ddls dont 288 communs avec SS2 et 288 avec SS4, SS4 comporte 10 542 ddls dont 288 communs avec SS3, 288 communs avec SS5 et 288 communs avec SS6, SS5 comporte 4 326 ddls dont 288 communs avec SS4, SS6 comporte 4 038 ddls dont 288 communs avec SS4 et 288 communs avec SS7, SS7 comporte 4 158 ddls dont 288 ddls communs avec SS6 et 60 avec SS8, et enfin SS8 comporte 5 860 ddls dont 60 communs avec SS7.

La fréquence utile est fixée à  $f_u = 300$  Hz. Le domaine fréquentiel contient 64 modes élastiques pour le modèle de référence. La condensation est réalisée avec les méthodes CB, MA, KL, KLCB et KLMA. Bien qu'elle pourrait être appliquée, la méthode MKL n'est pas considérée pour plus de clarté. Dans les deux premières techniques, le nombre de modes retenus est égal au nombre de modes dont la fréquence est inférieure ou égale à  $2 \times f_u$  pour les modes à interface libre et  $3 \times f_u$  pour les modes à interface fixe. Lorsqu'aucun ou trop de modes ne se trouvaient dans cette bande, le domaine a été élargi ou diminué. Pour les POMs, nous nous basons sur le critère  $\kappa = 0,9999$ . Ces POMs sont obtenus à partir d'un échantillonnage régulier de 200 réponses. Le récapitulatif de la composition des bases de réduction est fourni tableau 2.5. À noter que les modes de corps rigide des sous-structures sont compris dans les modes à interface libre et les POMs.



**Fig. 2.13** – Moteur d'avion étudié



**Fig. 2.14** – Sous-structures : (a) SS1 , (b) SS2, (c) SS3, (d) SS4 , (e) SS5, (f) SS6,(g) SS7 , (h) SS8

La taille du modèle réduit obtenu avec la dernière méthode est bien inférieure aux autres. Comme dans l'application précédente, les erreurs relatives sur les fréquences et vecteurs propres sont calculées et présentées figures 2.15 et 2.16 et tableau 2.6. On remarque que la méthode KL donne les meilleurs résultats. Nous constatons tableau 2.6 que la méthode MA

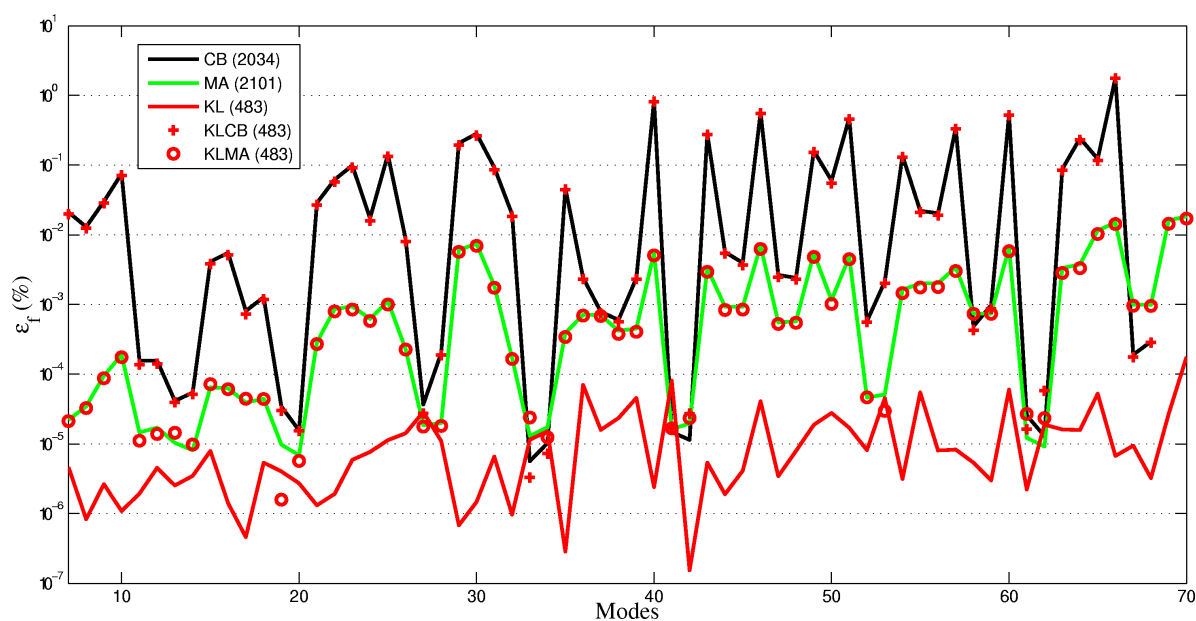
**Tab. 2.5** – Composition des bases de condensation du rotor (ddls)

	$T_{CB}$	$T_{MA}$	$T_{KL}, T_{KLCB}, T_{KLMA}$
SS1-SS2-SS3-SS4			
Modes contraints	288-576-576-864	-	-
Modes d'attache résiduels	-	288-576-576-864	-
Modes à interface fixe	18-6-34-7	-	-
Modes à interface libre	-	26-22-16-24	-
POMs	-	-	57-60-62-70
SS5-SS6-SS7-SS8			
Modes contraints	288-576-348-60	-	-
Modes d'attache résiduels	-	288-576-348-60	-
Modes à interface fixe	153-3-3-22	-	-
Modes à interface libre	-	166-15-16-28	-
POMs	-	-	70-62-53-49
Taille du modèle réduit	2 034	2 101	483
Taux de réduction	-94,8 %	-94,6 %	-98,7 %

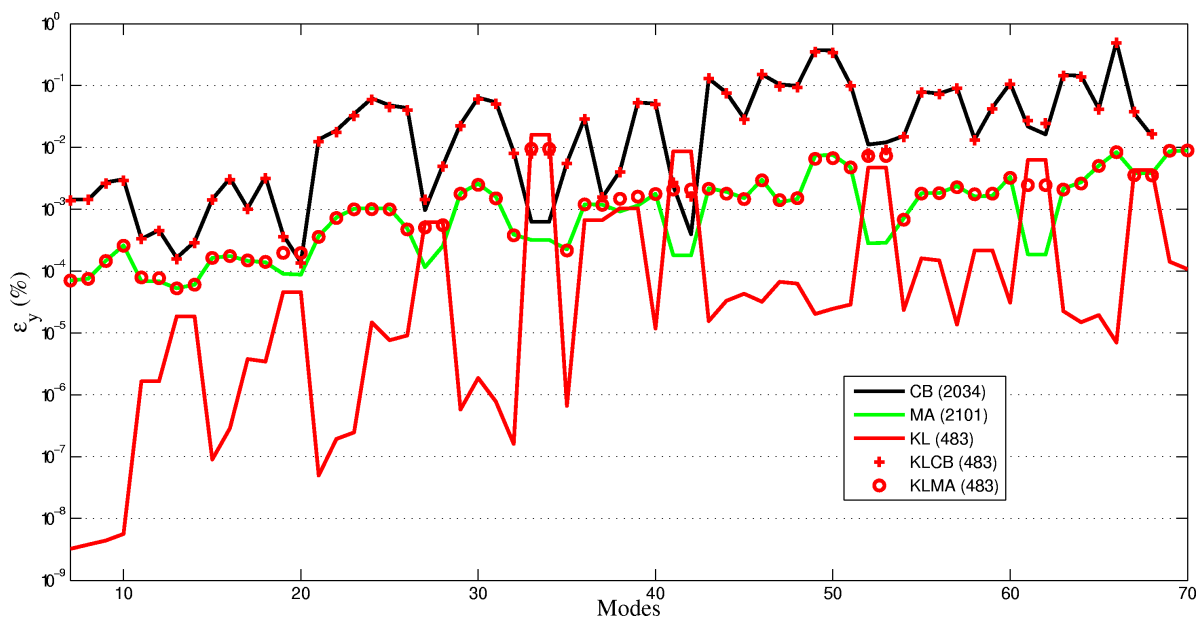
possède des résultats comparables en ce qui concerne l'erreur relative moyenne sur les vecteurs, mais le modèle réduit associé à KL a l'avantage d'être plus petit, ce qui facilite évidemment son évaluation. Pour CB, le calcul des erreurs a été effectué sur les 63 premiers modes élastiques, au lieu de 64 pour les autres, car le dernier mode n'est apparié avec aucun mode de la structure de référence. L'inconvénient de la méthode KL est qu'elle nécessite la connaissance *a priori* des modes du modèle complet. Si l'on ne possède pas cette information, les méthodes KLCB et KLMA peuvent être utilisées à partir des données issues de CB ou MA. Les résultats montrent que les précisions de KLCB et KLMA sont alors les mêmes que CB et MA. L'avantage est que le modèle réduit est beaucoup plus petit. Nous présentons figures 2.17a et 2.17b une comparaison des FRFs calculées – pour un point choisi arbitrairement dans la structure – avec la base de référence et les modes restitués pour CB, MA et KL. Les FRFs associées à KLCB et KLMA ne sont pas représentées puisque les courbes seraient confondues avec celles de CB et MA. La figure 2.17c représente les différences par rapport à la réponse de référence. La moins bonne précision de la FRF associée à CB est due au fait que le 64<sup>e</sup> mode obtenu avec cette méthode n'est pas bon. Dans l'ensemble, les résultats associés à la réduction par POMs sont de qualité supérieure.

**Tab. 2.6** – Erreurs relatives moyennes du rotor

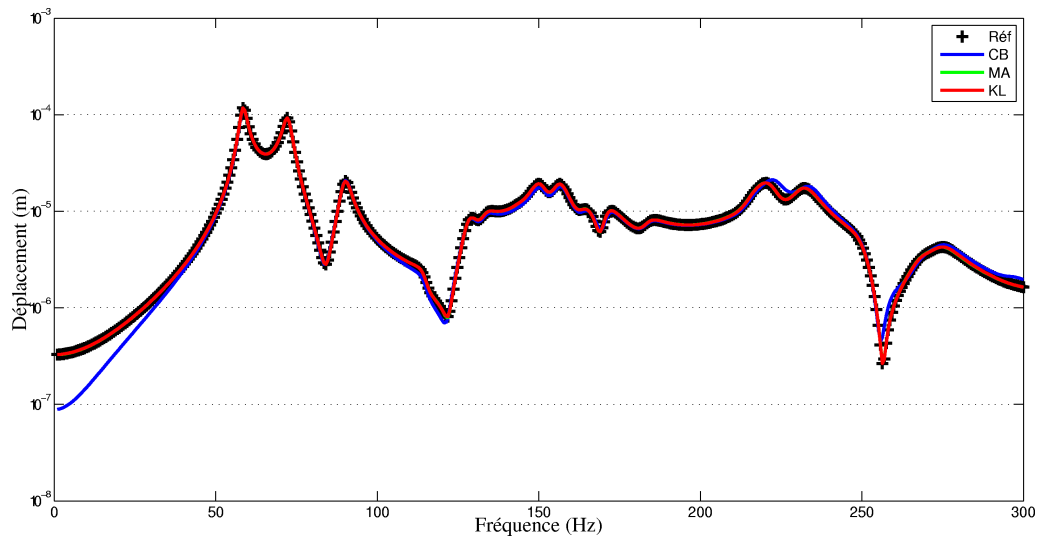
	$T_{CB}$	$T_{MA}$	$T_{KL}$	$T_{KLCB}$	$T_{KLMA}$
$\bar{\epsilon}_f$	0,11	$2,19 \times 10^{-3}$	$1,64 \times 10^{-5}$	0,10	$2 \times 10^{-3}$
$\bar{\epsilon}_y$	$5,42 \times 10^{-2}$	$1,71 \times 10^{-3}$	$1,34 \times 10^{-3}$	$5,24 \times 10^{-2}$	$2,33 \times 10^{-3}$



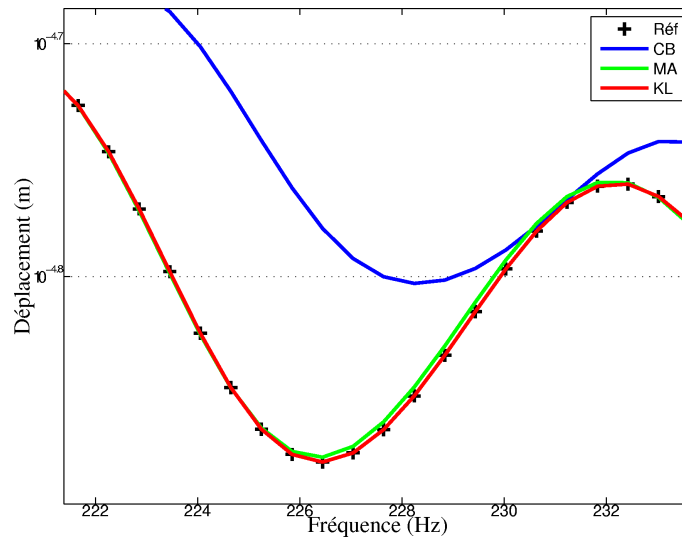
**Fig. 2.15** – Erreurs relatives sur les fréquences propres du moteur pour différentes méthodes de synthèse modale



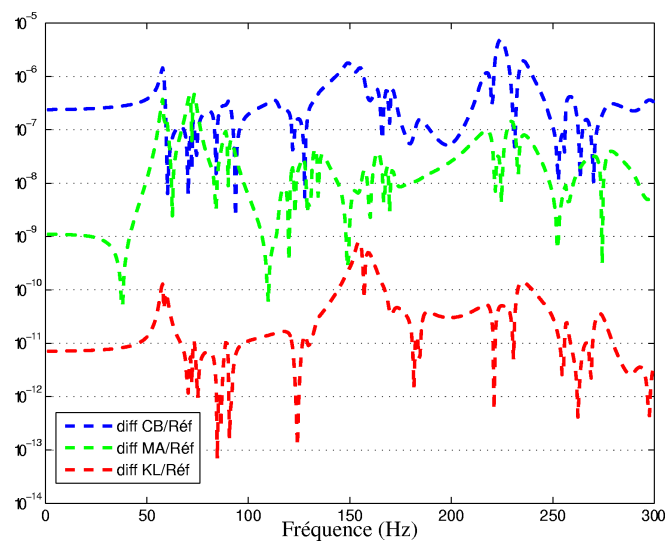
**Fig. 2.16** – Erreurs relatives sur les vecteurs propres du moteur pour différentes méthodes de synthèse modale



(a)



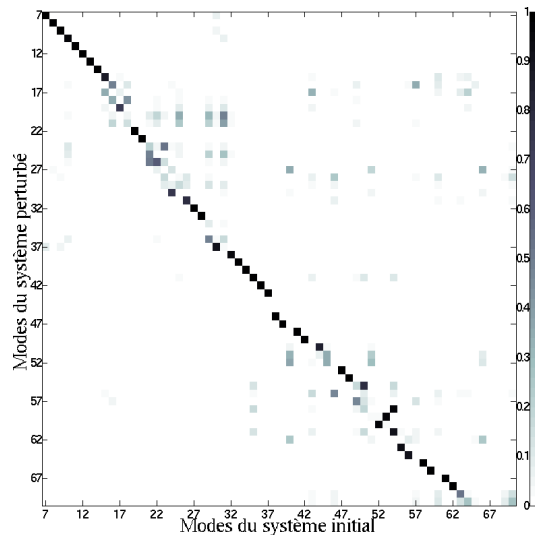
(b)



(c)

**Fig. 2.17** – (a) Comparaison des FRFs; (b) zoom sur les FRFs; (c) comparaison des différences par rapport à la référence

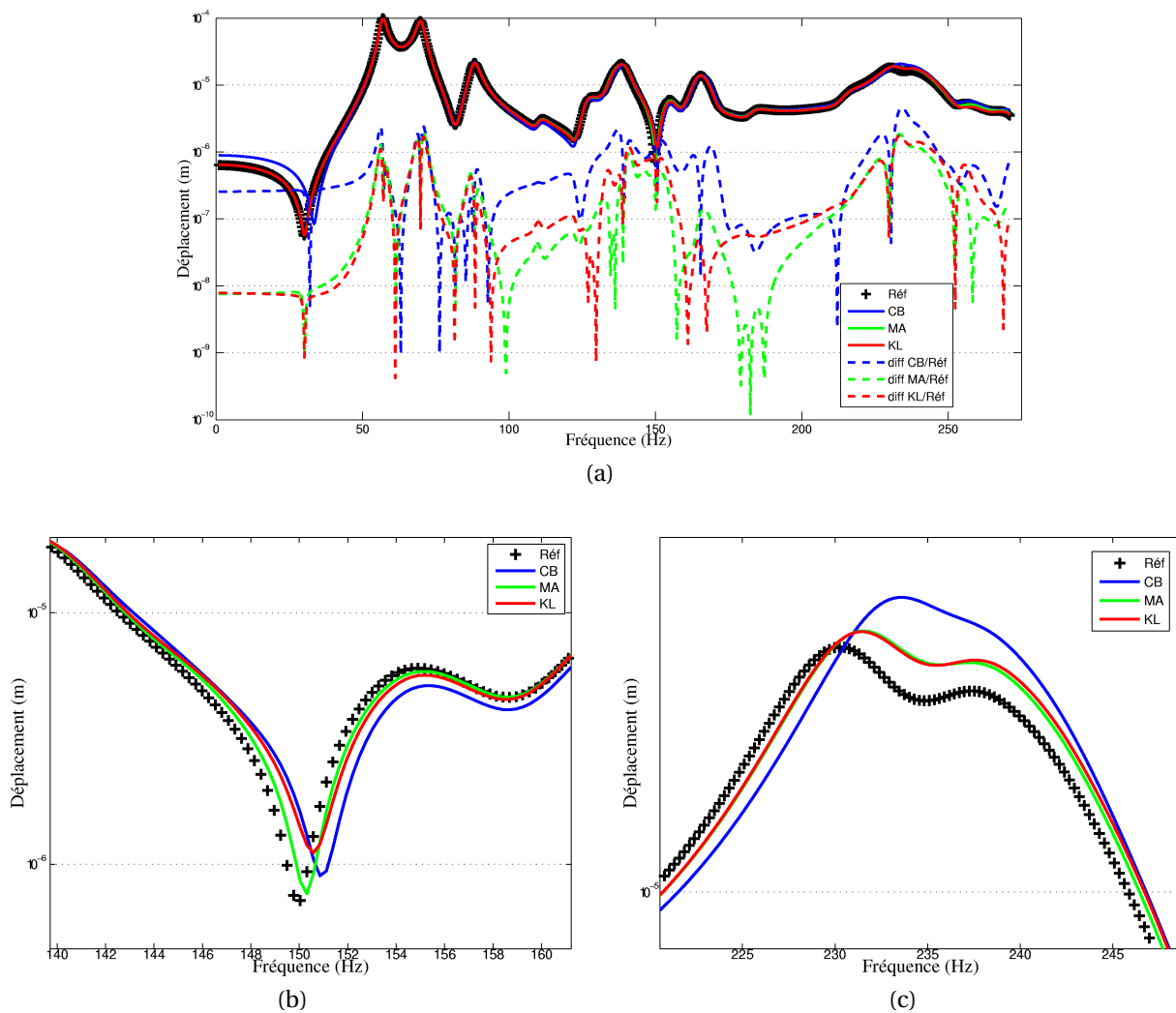
**Condensation robuste** Des perturbations sur deux sous-structures du rotor sont introduites. SS1 est perturbée en masse dans son ensemble. La masse volumique passe de  $4\,705\text{ kg.m}^{-3}$  à  $23\,525\text{ kg.m}^{-3}$ , soit une variation de 500 %. Les ailettes de SS3 sont elles assouplies. Elles voient leur module d'Young passer de  $1,15 \times 10^{11}\text{ N.m}^{-2}$  à  $5,75 \times 10^{10}\text{ N.m}^{-2}$ , soit une variation de 50 %. L'effet des modifications introduites est visible sur la matrice de MAC de la figure 2.18. Nous nous intéressons à la prédiction des 64 premiers modes élastiques du système modifié. Ces modes couvrent le domaine  $[0 ; 271\text{ Hz}]$ . Les bases de réduction initiales sont enrichies par des résidus statiques pour obtenir les bases de réduction  $\mathbf{T}_{\text{CBE}}$ ,  $\mathbf{T}_{\text{MAE}}$ ,  $\mathbf{T}_{\text{KLE}}$ . Nous constatons dans le tableau 2.7 que le nombre de résidus retenus pour KL est plus important que pour CB et MA. Pour ces deux dernières méthodes, le nombre maximum de résidus dépend du nombre de vecteurs de la base utilisée pour les former. Pour KL, le nombre maximum dépend du nombre de réponses échantillonnées. En ce qui concerne le choix du nombre de résidus, les deux approches ne peuvent donc pas conduire à des quantités comparables. Les 64 modes de la structure complète sont calculés et utilisés pour tracer les FRFs des figures 2.19a, 2.19b et 2.19c. Les FRFs les plus précises sont obtenues avec MA et KL. MA donne des résultats un peu plus précis mais KL a toujours l'avantage d'un modèle condensé beaucoup moins important.



**Fig. 2.18** – Matrice de MAC entre les modes du modèle initial du rotor et ceux du modèle perturbé

**Tab. 2.7** – Composition des bases de condensation enrichies du rotor (ddls)

	$\mathbf{T}_{\text{CBE}}$	$\mathbf{T}_{\text{MAE}}$	$\mathbf{T}_{\text{KLE}}$
Vecteurs résiduels pour SS1	17	20	46
Vecteurs résiduels pour SS3	30	10	60
Taille du modèle réduit	2 081	2 131	589



**Fig. 2.19** – (a) Comparaison des FRFs du système perturbé ; (b) et (c) Zooms sur les FRFs

## 2.1.4 Conclusion

Les simulations numériques montrent que les POMs peuvent s'appliquer efficacement à la synthèse modale et s'adaptent à la prédiction du comportement dynamique de structures soumises à des modifications structurales. Diverses approches ont été proposées.

Dans le cas déterministe, la précision de cette méthode est généralement supérieure aux méthodes classiques utilisant des bases de Ritz. Cependant, pour l'approche la plus efficace, l'obtention des réponses fréquentielles nécessite un calcul des modes et vecteurs propres de la structure complète. Ce problème peut être contourné en utilisant les solutions d'autres méthodes de synthèse modale. Dans le cadre de la condensation robuste, l'utilisation des POMs ne permet pas d'obtenir des résultats supérieurs aux autres méthodes. De par l'assemblage utilisé, l'avantage de la méthode KL est tout de même que les modèles réduits associés sont de tailles très inférieures à celles obtenues avec les méthodes de type Craig-Bampton.

Un autre avantage est la connaissance *a priori* du domaine de validité fréquentielle du modèle réduit par cette méthode. De plus, le choix des modes composants est simplifié. En effet, nous savons que les premiers POMs calculés sont toujours les plus importants. Dans la méthode CB par exemple, certains modes à interface fixe de la base de réduction sont souvent inutilement inclus. L'optimisation du choix des modes composants est par ailleurs l'objet des deux prochaines sections.

Cette méthode trouvera peut-être son réel intérêt dans la réanalyse de systèmes non-linéaires où jusqu'à présent les études sur des bases robustes sont limitées à traiter des structures possédant des non-linéarités localisées. Dans un stade de développement moins avancés, la méthode proposée a été utilisée dans [66] pour la synthèse modale de telles structures.

## 2.2 Qualification des super-éléments

En dynamique des structures, les méthodes de condensation les plus utilisées sont les méthodes avec assemblage explicite sur les ddl de jonction, telles que les méthodes de Craig-Bampton ou de Martinez. Le principal objectif de cette section est de présenter des outils capables de localiser les super-éléments dont la base modale est inadaptée afin d'entreprendre des mesures correctives. La méthodologie proposée contient différents indicateurs d'aide à la décision et se déroule en trois phases :

- un filtrage des modes normaux peu influents ;
- une localisation des sous-structures mal condensées ;
- une correction des super-éléments déficients.

### 2.2.1 Filtrage

La sélection des modes composants de la base tronquée des modes à interface fixe est généralement basée sur un critère empirique de fréquence de coupure. En pratique, cette fréquence est choisie deux ou trois fois plus grande que la plus grande fréquence d'intérêt du système complet. Même si cette méthode de sélection *a priori* donne généralement de bons résultats, elle conduit à retenir des modes qui n'interviennent pas significativement dans le comportement dynamique global du système ou à négliger des modes importants ayant des fréquences supérieures à celle de coupure.

Partant de  $k$  modes retenus à partir d'une fréquence de coupure, l'objectif de cette première phase est de filtrer les modes des sous-structures qui ont les plus faibles participations dans les modes globaux. Ceci doit permettre de réduire les temps de calcul mais sans perte de précision dans la bande d'analyse. À cette fin, nous utilisons deux indicateurs : un indicateur basé sur l'observation de la composition des modes et un indicateur réservé à la méthode de Craig-Bampton utilisant les masses effectives.

#### Observation de la composition des modes

La méthode de réduction de Craig-Bampton consiste à représenter le comportement de la structure globale en effectuant une combinaison linéaire des modes des différentes sous-structures et à y ajouter la contribution des déplacements aux jonctions. Chaque mode de chaque sous-structure participe donc différemment à une déformée donnée. Pour chaque sous-structure, il est possible de comparer la participation d'un mode à celle des autres modes. Nous allons calculer des taux de participation qui permettent de comparer l'influence des modes d'une même sous-structure.



Pour chaque sous-structure ( $ss$ ), la relation de passage entre le vecteur des coordonnées physiques  $\mathbf{y}^{(ss)}$  et les coordonnées généralisées est

$$\mathbf{y}^{(ss)} = \mathbf{T}_{CB}^{(ss)} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{j_{ss}}^{(ss)} \\ \mathbf{q}_{k_{ss}}^{(ss)} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

$\mathbf{y}_{j_{ss}}^{(ss)}$  sont les coordonnées physiques des  $j_{ss}$  ddls de jonction de ( $ss$ ) et  $\mathbf{q}_{k_{ss}}^{(ss)}$  sont les coordonnées généralisées associées aux  $k_{ss}$  modes normaux à interface fixe retenus pour construire  $\mathbf{T}_{CB}^{(ss)}$ .

Pour la structure complète composée de  $n$  super-éléments, la relation s'exprime par

$$\mathbf{y}^{(c)} = \mathbf{T}_{CB}^{(c)} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{j_{tot}}^{(tot)} \\ \mathbf{q}_{k_1}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{k_n}^{(n)} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{CB}^{(c)} \mathbf{q}, \quad (2.38)$$

avec  $\mathbf{y}_{j_{tot}}^{(tot)}$  l'ensemble des déplacements aux jonctions.

Soient

$${}_p\mathbf{q} = \begin{bmatrix} {}_p\mathbf{y}_{j_{tot}}^{(tot)} \\ {}_p\mathbf{q}_{k_1}^{(1)} \\ \vdots \\ {}_p\mathbf{q}_{k_n}^{(n)} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}_p\mathbf{q}_{k_{ss}}^{(ss)} = \begin{bmatrix} {}_p q_1^{(ss)} \\ \vdots \\ {}_p q_v^{(ss)} \\ \vdots \\ {}_p q_{k_{ss}}^{(ss)} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

${}_p\mathbf{q}$  est le  $p^e$  mode du système complet restitué après condensation et  ${}_p\mathbf{q}_{k_{ss}}^{(ss)}$  les coordonnées généralisées provenant de la sous-structure  $ss$ .

Pour chaque sous-structure ( $ss$ ), il est possible d'évaluer la participation d'un mode à interface fixe  $v$  au mode global  ${}_p\mathbf{q}$  avec l'indicateur défini par

$${}_p I_v = \frac{|{}_p q_v^{(ss)}|}{\sum_{v=1}^{k_{ss}} |{}_p q_v^{(ss)}|}. \quad (2.40)$$

Pour une base modale de  $P$  vecteurs propres la participation du mode  $v$  aux  $P$  vecteurs propres sera estimée par

$$I_v^{\text{part}} = \max_{p \in P} ({}_p I_v). \quad (2.41)$$

### Masse modale effective

En dynamique des structures, les masses modales effectives peuvent être utilisées pour sélectionner les modes dont les réactions à une interface rigide sont importantes. Lorsqu'elles sont utilisées pour des tests avec excitations à la base [182], l'interface rigide est la base de la structure où agit l'excitateur et lorsqu'elles sont utilisées dans le cadre de la méthode de Craig-Bampton [85], l'interface est définie par les ddls de jonction reliant la sous-structure étudiée avec le reste de la structure.

À partir de l'équation (1.36), nous pouvons obtenir la relation liant le déplacement  $\mathbf{y}_j$  à

l'interface et le vecteur des efforts  $\mathbf{f}_j$  correspondant,

$$\mathbf{f}_j = \left( \mathbf{K}_G^c - \omega^2 \left[ \mathbf{M}_G^c + \sum_{v=1}^k \frac{1}{\left( \frac{\omega_v}{\omega} \right)^2 - 1} \mathbf{L}_v \mathbf{L}_v^T \right] \right) \mathbf{y}_j. \quad (2.42)$$

Précisons que  $\mathbf{L}_v$  est la  $v^e$  colonne de la matrice des facteurs de participation modale  $\mathbf{L}_{jk}$  donnée équation (1.37). Cette relation permet de distinguer deux composantes de la matrice de masse réduite aux ddls de jonction : une matrice de corps rigide relative aux ddls de jonction  $\mathbf{M}_G^c$  et une matrice de masse dynamique  $\bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{app}}$  – ou matrice de masse apparente – et obtenue par

$$\bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{app}} = \sum_{v=1}^k \frac{1}{\left( \frac{\omega_v}{\omega} \right)^2 - 1} \left( \bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eff}} \right)^v. \quad (2.43)$$

Les termes  $\left( \bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eff}} \right)^v = \mathbf{L}_v \mathbf{L}_v^T$  sont les matrices de masse modale effective.

De l'équation (2.42), nous constatons que les masses effectives permettent de caractériser la contribution des différents modes aux forces d'inertie  $\mathbf{f}_j$  générées par les déplacements aux interfaces  $\mathbf{y}_j$ . De plus, on peut montrer que si  $k = i$ , la somme de toutes les masses effectives est

$$\sum_{v=1}^{k=i} \left( \bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eff}} \right)^v = \mathbf{M}_G^c - \bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eq}}, \quad (2.44)$$

où  $\bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eq}} = \mathbf{M}_{jj} - \mathbf{M}_{ji} \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ij}$  est la matrice de masse équivalente aux ddls de jonction. Dans la pratique  $\bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eq}}$  est considérée comme nulle. De plus, dans le cadre de la réduction de modèle,  $k$  est très inférieur à  $i$ . La matrice résiduelle résultant de la troncature est alors

$$\bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{res}} = \bar{\mathbf{M}}_{jj} - \sum_{v=k+1}^i \left( \bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eff}} \right)^v. \quad (2.45)$$

L'importance de la masse effective par rapport à la masse de corps rigide constitue le critère de globalité du mode considéré. En effet, un mode dont la masse effective aux jonctions est significative devrait favoriser les couplages par transmission d'énergie de déformation dans les autres sous-structures. Les matrices de masses effectives étant de dimension  $j \times j$ , le concept de masse effective est attaché à une direction de déplacement donnée. Cela signifie qu'un mode peut avoir une masse effective importante dans une direction et faible dans une autre. Pour cela, étant donnée une direction  $a$ , les termes  $\left( \bar{\mathbf{M}}_{aa}^{\text{eff}} \right)^v$  de la diagonale de  $\left( \bar{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eff}} \right)^v$  sont confrontés aux termes correspondants de  $\mathbf{M}_G^c$  en utilisant le ratio

$$\left( \mathbf{R}_{aa}^{\text{eff}} \right)^v = \frac{\left( \bar{\mathbf{M}}_{aa}^{\text{eff}} \right)^v}{\mathbf{M}_{aa}^c}. \quad (2.46)$$

Dans la pratique, les masses effectives sont calculées pour un noeud auquel les noeuds d'interface sont reliés par des liaisons rigides. Pour chaque mode  $v$ , nous disposons d'une matrice  $\left( \bar{\mathbf{M}}_{66}^{\text{eff}} \right)^v$  de taille  $6 \times 6$  correspondant aux trois ddls de translation et aux trois ddls de rotation. Un mode normal à interface fixe sera donc considéré comme global si au moins une des valeurs des masses effectives correspondant aux  $j$  directions d'excitation représente au moins 1 % à 10 % de la masse de corps rigide.

Une autre méthode pour évaluer la contribution du mode  $v$  est de calculer le rapport de

traces [85]

$$I_v^{\text{eff}} = \frac{\text{tr} \left( \left( \tilde{\mathbf{M}}_{jj}^{\text{eff}} \right)^v \right)}{\text{tr} \left( \mathbf{M}_G^c \right)}. \quad (2.47)$$

Nous obtenons alors un scalaire représentatif de l'importance au comportement global.

L'utilisation des masses modales effectives doit être prise avec précaution car elle peut conduire à éliminer des modes qui ne sont pas locaux. En effet, il se peut que le couplage d'une sous-structure avec le reste de la structure puisse avoir lieu par transmission d'inertie mais aussi par une importante énergie de déformation à l'interface.

### 2.2.2 Localisation

Nous avons vu au paragraphe 1.5.2 que les méthodes de localisation de modélisation consiste à confronter des résultats de calculs numériques à des mesures expérimentales afin de résoudre par exemple des problèmes de recalage de modèles. La non-concordance des résultats expérimentaux et des résultats issus de la simulation témoigne alors d'un modèle imparfait. Si au préalable le modèle a été réparti en sous-structures, la localisation permettrait de localiser la ou les super-éléments erronés. La méthode de localisation des erreurs appliquée ici est basée sur la minimisation des résidus en énergie MDRE développée par Balmes [10] et dont le principe a été présenté au paragraphe 1.5.2.

Nous utilisons cette démarche dans le cadre de la sous-structuration afin de localiser les sous-structures condensées dont la base modale a été réduite trop sévèrement. Nous réalisons en quelque sorte une location des erreurs de condensation.

Précisons tout d'abord quelques notations :

- $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse et de raideur de la structure physique globale ;
- $\mathbf{M}^c$  et  $\mathbf{K}^c$  sont les matrices de masse et de raideur de la structure obtenues par condensation ;
- $\mathbf{M}^{(ss)}$  et  $\mathbf{K}^{(ss)}$  sont les matrices de masse et de raideur de la sous-structure  $ss$  du problème physique.

Les matrices  $\mathbf{M}^c$  et  $\mathbf{K}^c$  permettent d'obtenir les solutions propres du système condensé. Les vecteurs propres obtenus sont ensuite projetés sur les ddl du modèle physique afin d'obtenir des vecteurs propres  $\tilde{\mathbf{y}}_v \in \mathbb{R}^{N,1}$ . La localisation de super-éléments défaillants est formulée par analogie avec la localisation d'erreur de modélisation. Les relations sont présentées tableau 2.8.

L'étude des énergies résiduelles sert donc à déterminer les sous-structures mal condensées sans avoir à calculer les solutions propres du modèle non condensé.

Pour une meilleur comparaison entre les sous-structures, il est nécessaire de pondérer les énergies résiduelles. En divisant l'énergie résiduelle de la sous-structure ( $ss$ ) par l'énergie résiduelle totale, nous obtenons le critère

$$I_v^{\text{enr}} = \frac{e_v^{(ss)}}{\tilde{\mathbf{y}}_v^T \mathbf{K}^{(ss)} \tilde{\mathbf{y}}_v}. \quad (2.48)$$

De grandes valeurs pour  $I_v^{\text{enr}}$  indiquent que le modèle réduit possède d'importantes erreurs de condensation.

**Tab. 2.8** – Relations entre la localisation d'erreur de modélisation et la localisation d'erreur de condensation

	Erreur de modélisation	Erreur de condensation
Critère d'erreur	Modélisation	Condensation
Modèle à représenter	Structure expérimentale	$\mathbf{K}, \mathbf{M}$
Représentation	$\mathbf{K}, \mathbf{M}$	$\mathbf{K}^c, \mathbf{M}^c$
Cible de la localisation	$\mathbf{K}^{(el)}$	$\mathbf{K}^{(ss)}$
Vecteur propre utilisé	$\hat{\mathbf{y}}_v$	$\tilde{\mathbf{y}}_v$
Forces résiduelles $\Delta \mathbf{f}_v$	$\mathbf{Z}_v \hat{\mathbf{y}}_v$	$\mathbf{Z}_v \tilde{\mathbf{y}}_v$
Déplacements résiduels $\mathbf{r}_v$	$\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f}_v$	$\mathbf{K}^{-1} \Delta \mathbf{f}_v$
Énergie résiduelle	$\mathbf{r}_v^T \mathbf{L}^{(el)} \mathbf{K}^{(el)} (\mathbf{L}^{(el)})^T \mathbf{r}_v$	$\mathbf{r}_v^T \mathbf{L}^{(ss)} \mathbf{K}^{(ss)} (\mathbf{L}^{(ss)})^T \mathbf{r}_v$
Information apportée	$\mathbf{K}^{(el)}$ bien ou mal modélisée	$\mathbf{K}^{(ss)}$ bien ou mal condensée

Le principal inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite l'inversion de la matrice de raideur du modèle complet. Ce calcul peut être très coûteux pour des modèles de grande taille.

Bien que ces indicateurs permettent de localiser les super-éléments déficients, ils ne donnent aucune indication directe sur l'information manquante.

Une propriété intéressante des résidus est apparue : il arrive que certains d'entre eux aient des géométries proches des déformées des modes manquants. Cette propriété a été exploitée afin d'identifier l'information manquante et de la réinjecter dans la ou les super-éléments défaillants en vue de les corriger. C'est l'objet de la section suivante.

### 2.2.3 Correction

La méthode de correction généralement utilisée consiste à recalculer les super-éléments erronés avec des bases modales plus étendues. Dans l'approche proposée ici, nous ajoutons des vecteurs statiques à la base modale des sous-structures. Cette méthode corrige le super-élément sans avoir à refaire l'analyse modale. L'information réinjectée est issue des calculs de localisation et compense au mieux l'information manquante.

Dans le cas de la troncature modale, plusieurs modes de rang élevé peuvent manquer. De plus, c'est bien souvent leurs actions conjuguées qui sont significatives. Le but n'est donc pas d'apporter une correction à partir du résidu extrait d'un seul mode mais de prendre en compte le résidu de chaque mode. Chaque mode de la structure globale utilisé pour effectuer la localisation permet de calculer un vecteur résiduel. Nous calculons ensuite quelques vecteurs représentatifs de l'ensemble.

Soit  $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dots]$  la base des vecteurs résiduels obtenus pendant l'étape de localisation. Pour la méthode de Craig-Bampton ou Martinez, nous pouvons supposer que les déplacements statiques sont déjà correctement représentés. Il convient alors de considérer

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - \mathbf{B} \mathbf{R}_j, \quad (2.49)$$

où  $\mathbf{R}_j$  est la restriction de  $\mathbf{R}$  aux ddls de jonction.  $\mathbf{B}$  est la base de modes à interface fixe pour Craig-Bampton et la base de modes d'attache résiduels pour Martinez.

La base obtenue n'est pas nécessairement orthogonale puisque chaque mode d'une sous-structure peut participer à différents modes de la structure globale. Par conséquent, ils peuvent apparaître dans plusieurs résidus. Il est donc préférable d'effectuer une décomposition en valeurs singulières de la matrice des résidus. Nous nous contentons ensuite d'extraire les vecteurs singuliers de gauche correspondant aux  $m$  plus grandes valeurs singulières.

Une fois l'information manquante isolée, nous la réinjectons dans le modèle. Elle est associée aux vecteurs de la base modale en tant que base de vecteurs statiques. Une nouvelle base enrichie remplaçant la base de transformation initiale  $\mathbf{T}_{CB}$  est alors définie par

$$\mathbf{T}_{CBE} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{CB} & \mathbf{U}_1 & \cdots & \mathbf{U}_m \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

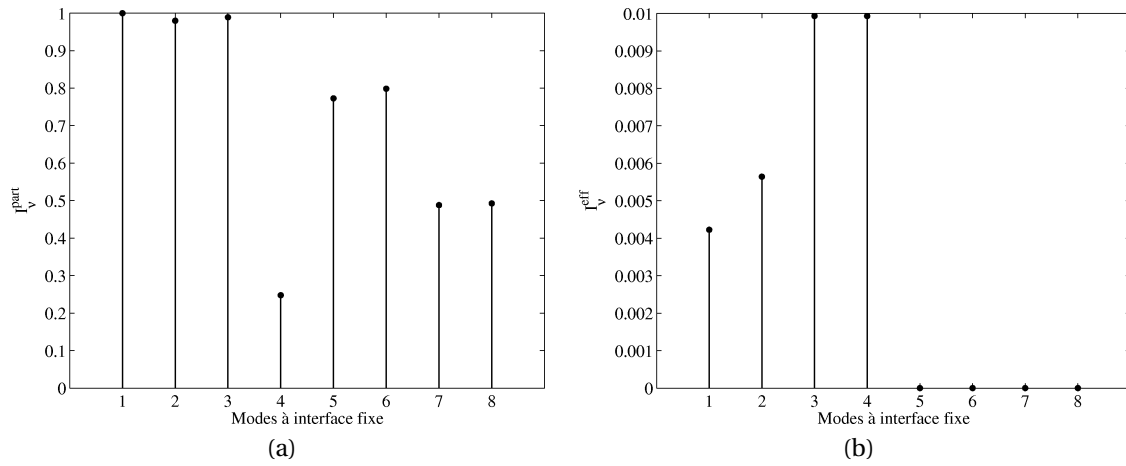
## 2.2.4 Application au moteur d'avion

La structure présentée figure 2.13 au paragraphe 2.1.3 est utilisée pour illustrer la méthodologie. La bande de fréquence d'analyse du modèle complet est fixée à  $[0 ; 300 \text{ Hz}]$ . Dans cette application, seules les sous-structures SS1 à SS5 sont assemblées. Le MEF possède alors 28 590 ddl. La sous-structure SS4 ne sera pas réduite mais jouera le rôle de structure résiduelle. Il est en effet souvent nécessaire de ne pas réduire une sous-structure afin que celle-ci puisse servir de support aux éléments que l'on ne souhaite pas condenser. Pour déterminer le nombre de modes à retenir pour les super-éléments de chaque sous-structure, nous utilisons le critère consistant à inclure les modes contenus dans une bande fréquentielle deux fois plus grande que la bande d'étude du modèle complet. Après une analyse de chaque sous-structure sur  $[0 ; 600 \text{ Hz}]$ , 8 modes sont retenus pour SS1, 4 modes pour SS2, 4 modes pour SS3 et 153 modes pour SS5. Le modèle réduit final est alors de 8 157 ddl.

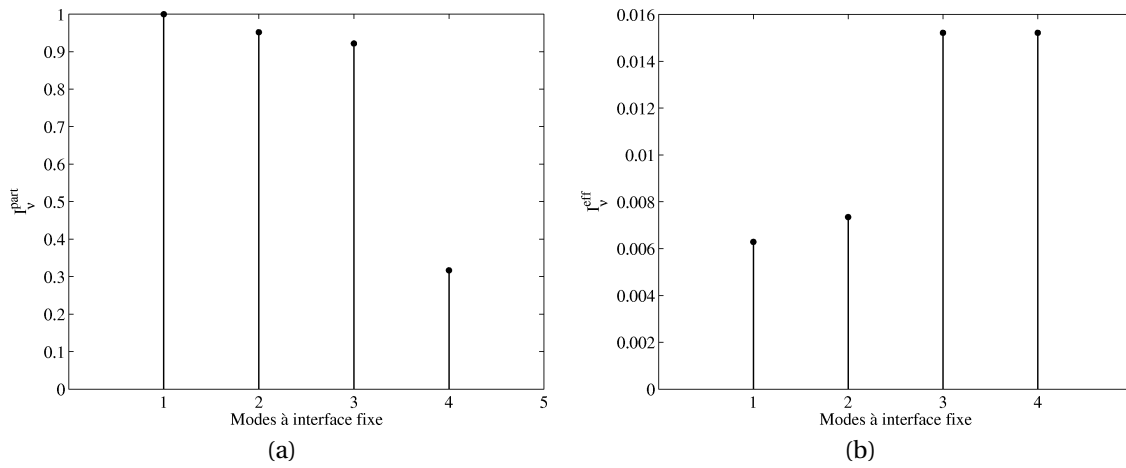
### Filtrage des modes

L'analyse modale du modèle réduit est réalisée. Nous appliquons ensuite à chaque sous-structure la procédure de filtrage décrite paragraphe 2.2.1 pour éliminer les modes ne participant pas au comportement dynamique global de la structure assemblée. Les résultats obtenus sont présentés figures 2.20, 2.21, 2.22 et 2.23. Il apparaît que les deux indicateurs ne sont pas toujours en accord, un compromis est ainsi fait mais toujours en privilégiant l'indicateur  $I_v^{\text{part}}$  calculé à partir de l'observation de la composition des modes. En se basant sur ces critères, nous décidons de conserver 4 modes pour SS1 – modes 1 à 4 –, tous les modes pour SS2, 3 modes pour SS3 – modes 1 à 3 – et 47 modes pour SS5 – modes 1 à 42, 46, 47 et 87 à 89. Même si des modes « utiles » sont éliminés, l'information manquante sera restituée grâce à l'étape de correction présentée paragraphe 2.2.3. Le nouveau modèle réduit comporte désormais de 8 046 ddl.

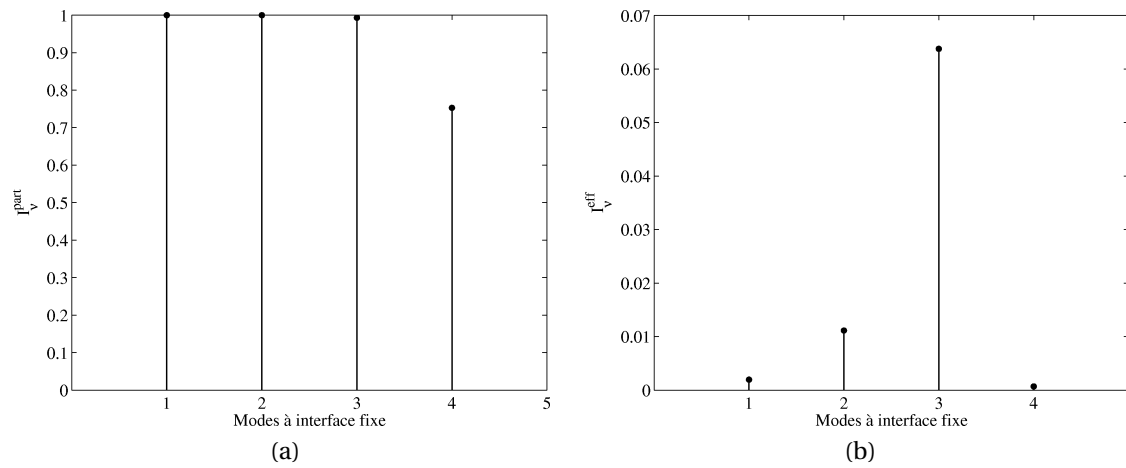
Sur la matrice de MAC, donnée figure 2.24a, entre les modes du modèle de référence et ceux du modèle réduit par la méthode de Craig-Bampton avant filtrage, nous pouvons constater que le modèle réduit est loin d'être exact. Les super-éléments auront besoin d'être enrichis. Pour nous assurer que nous n'avons pas éliminé d'informations importantes, nous avons comparé les modèles avant et après filtrage. La figure 2.24b montre que malgré l'élimination de 110 modes sur 169, aucune détérioration n'est à signaler quant à la précision des déformées modales.



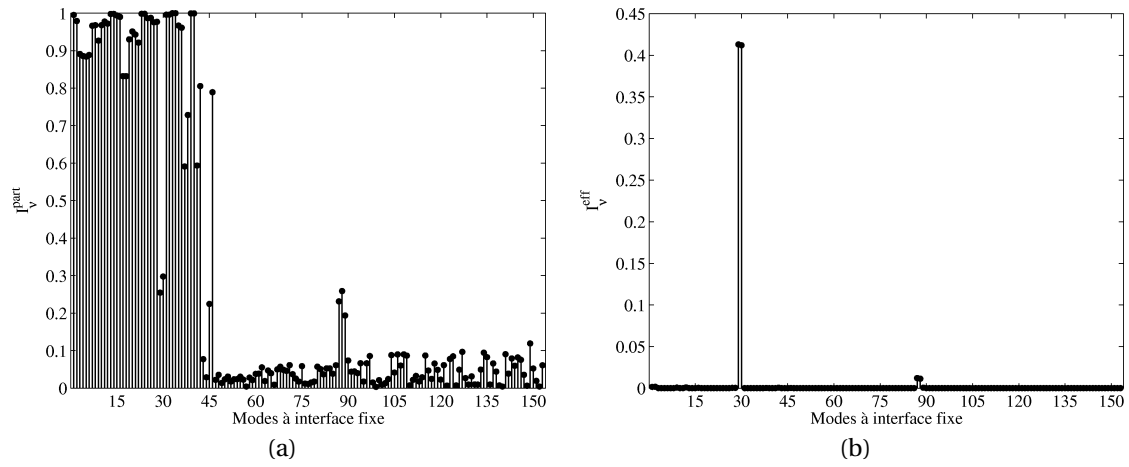
**Fig. 2.20** – Résultats du filtrage pour SS1 : (a)  $I_v^{part}$ , (b)  $I_v^{eff}$



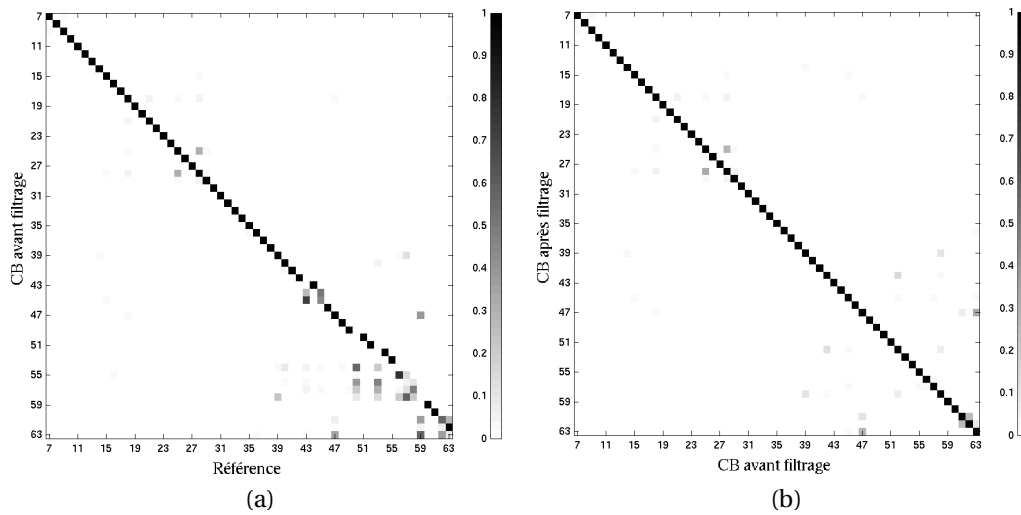
**Fig. 2.21** – Résultats du filtrage pour SS2 : (a)  $I_v^{part}$ , (b)  $I_v^{eff}$



**Fig. 2.22** – Résultats du filtrage pour SS3 : (a)  $I_v^{part}$ , (b)  $I_v^{eff}$



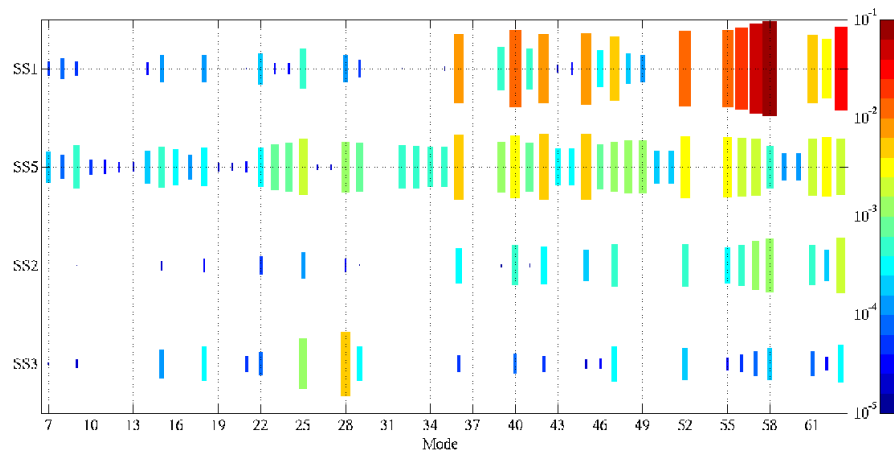
**Fig. 2.23** – Résultats du filtrage pour SS5 : (a)  $I_v^{part}$ , (b)  $I_v^{eff}$



**Fig. 2.24** – (a) Matrice de MAC entre les modes de la référence et ceux obtenus avec CB avant filtrage, (b) Matrice de MAC entre les modes du modèle condensé avant et après filtrage

### Localisation des sous-structures défaillantes

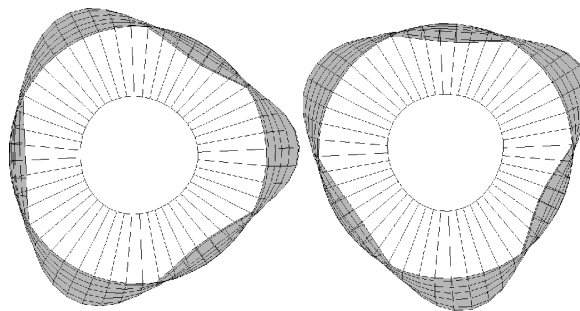
La localisation nous permet d'identifier les sous-structures qui entraînent les plus fortes erreurs dans le modèle global condensé. Dans le cas présent, nous identifions SS1 comme étant à l'origine des principales erreurs du modèle global. Le rapport énergétique de l'équation (2.48) est de l'ordre de  $10^{-2}$  pour plusieurs modes de cette structure et à une valeur maximale de 0,0856. Ce résultat est significatif puisqu'il correspond à une erreur de l'ordre de 8,56 %. Les erreurs dans les autres structures sont inférieures à 0,5 %.



**Fig. 2.25** – Localisation des erreurs du modèle condensé après filtrage

### Correction

Pour corriger SS1, nous utilisons les vecteurs résiduels issus de la localisation par énergies résiduelles. Nous les réinjectons en tant que vecteurs statiques dans sa base de modes aux jonctions bloquées. La décomposition en valeurs singulières permet de choisir les vecteurs à réinjecter. Les deux premiers résidus sont conservés. La figure 2.26 montre l'aspect des déformations des résidus retenus. Nous avons aussi comparé la base modale de la sous-structure aux résidus. Ces derniers correspondent à deux modes tronqués : les modes 11 et 12. Les fréquences associées à ces modes doubles sont respectivement de 664,153 Hz et 664,157 Hz. Comme la fréquence de coupure est 600 Hz, ils n'avaient donc pas été pris en compte.



**Fig. 2.26** – Déformées des résidus de SS1



## Comparaison au modèle de référence

Suite à la correction de SS1, nous avons effectué l'analyse modale du modèle optimisé sur la bande de fréquence [0 ; 300 Hz]. Nous obtenons 63 modes. La localisation par énergies résiduelles est réalisée sur le modèle optimisé pour qualifier la qualité du modèle (figure 2.27). Les rapports d'énergie sont plus faibles que lors de la première localisation. Le plus important est de 0,0173 soit 1,73 %. Nous pouvons donc considérer que le modèle obtenu est valide dans la bande de fréquence d'étude.

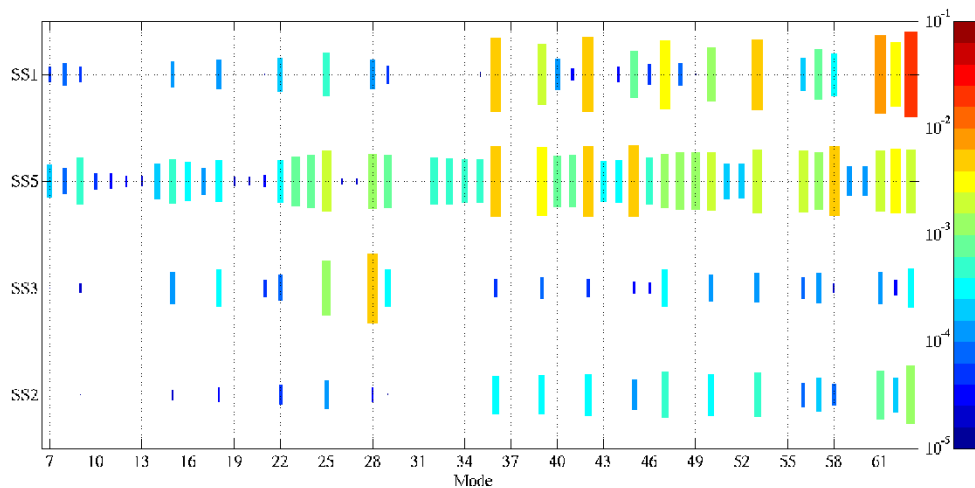


Fig. 2.27 – Localisation d'erreur après correction

La matrice de MAC 2.24a indique que le modèle condensé initial n'est pas assez prédictif. Plusieurs modes ne sont pas appariés. La matrice 2.28 indique que le modèle optimisé avec des bases modales réduites et quelques vecteurs statiques corrèle correctement le MEF de référence. Tous les modes sont désormais appariés.

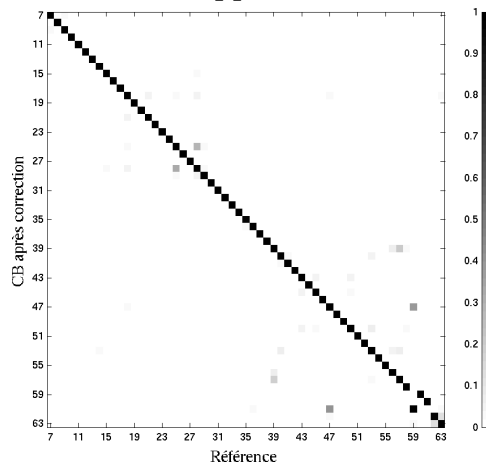
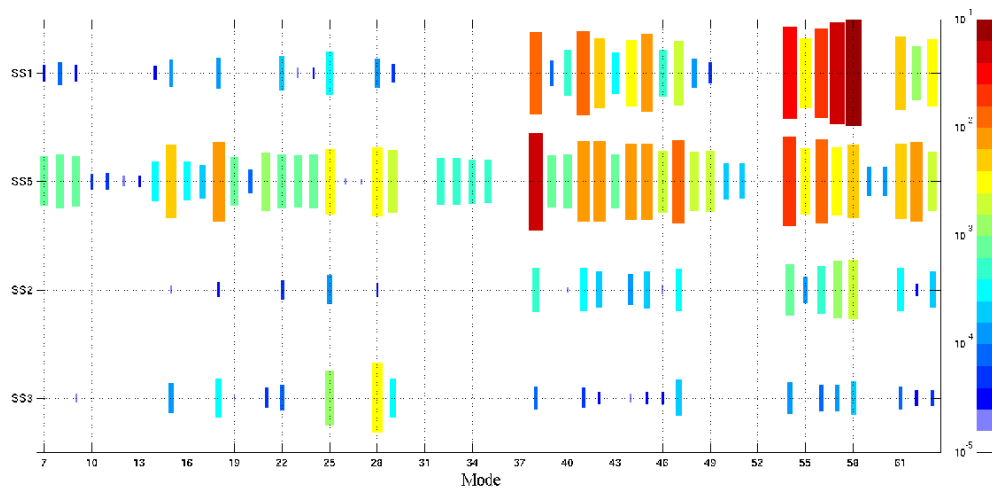


Fig. 2.28 – Matrice de MAC après optimisation

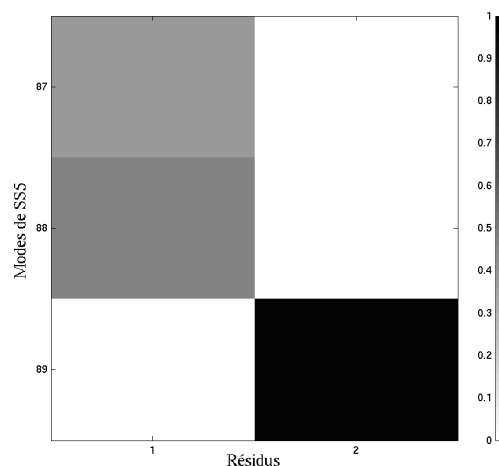
## Seconde analyse

Pour tester la capacité de la méthode à compenser l'élimination de modes importants, nous effectuons une seconde analyse, où durant l'étape de filtrage nous retirons les mêmes

modes plus les modes 87 à 89 pour SS5. Ainsi, trois modes qui semblaient globaux sont maintenant manquants. La figure 2.29 montre les erreurs de localisation. Comme attendu les super-éléments SS1 et SS5 sont identifiés comme erronés. Nous améliorons donc les bases SS1 et SS5 avec des vecteurs résiduels. Après observation des valeurs singulières, deux vecteurs sont retenus pour SS1 et SS5. Pour SS1, ces résidus sont les mêmes que précédemment. Une comparaison des deux résidus de SS5 avec les modes 87, 88 et 89 est présentée figure 2.30. Nous constatons que le deuxième résidu corrèle avec le mode 89 et que le premier résidu appartient au sous-espace formé par les vecteurs propres des deux modes doubles 87 et 88. L'information utile est donc retrouvée avec l'étape de correction. L'analyse modale du nouveau modèle donne les mêmes résultats que ceux montrés figure 2.28.



**Fig. 2.29** – Localisation d'erreur après filtrage trop sévère



**Fig. 2.30** – Comparaison des modes 87, 88 et 89 de SS5 avec les résidus

## 2.2.5 Conclusion

Le besoin initialement identifié était de développer des outils capables de localiser les super-éléments défaillants d'un système sous-structuré afin d'entreprendre des mesures correctives. Dans la méthode proposée, des énergies résiduelles sont calculées pour chaque

sous-structure à partir des modes complets issus de la réduction. Plus l'énergie résiduelle est importante, plus l'erreur sur le mode observé est grande.

Nous avons ensuite étudié la possibilité de corriger les super-éléments identifiées comme erronés. La mesure de correction la plus naturelle est de recalculer les sous-structures concernées, mais déterminer *a priori* le nombre de modes à retenir n'est pas aisé. Nous avons montré qu'il est possible d'utiliser les résidus des méthodes de localisation et de les réinjecter, après quelques modifications, dans les bases modales des sous-structures. La méthode de correction proposée est efficace et s'applique à différentes méthodes de synthèse modale.

En étape préalable, nous avons également proposé des méthodes de filtrage des modes constituant les bases modales des sous-structures d'un modèle. Ces filtrages permettent d'identifier les modes ne participant pas à un comportement global dans la bande de fréquences d'étude.

La méthodologie a été appliquée à une réduction de Craig-Bampton mais peut également s'appliquer à d'autres méthodes du même type. Cette approche s'est avérée aussi efficace pour la méthode de Martinez.

## 2.3 Choix optimal des degrés de liberté maîtres

Nous avons présenté paragraphe 1.2.4 la formulation de la réduction de Guyan et précisé que le domaine de validité du modèle condensé dépend essentiellement du choix des ddls maîtres retenus. Ce problème concerne également la méthode de Craig-Bampton puisque celle-ci utilise une base de transformation constituée de modes contraints enrichis par des modes normaux à interface fixe.

Parmi les premiers auteurs à proposer des indicateurs de sélection des ddls maîtres, Levy et Guyan [115] recommandent les ddls ayant une grande amplitudes de déplacement dans la bande fréquentielle utile ou les ddls ayant une masse importante. Ramsden et Stocker [167] sélectionnent les ddls associés à de grandes masses et raisonnablement flexibles vis-à-vis des autres ddls. Ces critères sont considérés comme étant inadéquats par Downs [49] puisqu'ils demandent une connaissance *a priori* de la solution, c'est à dire qu'il est nécessaire de connaître une sous-base modale du système où les ddls maîtres sont fixés. Il propose de restreindre le choix aux ddls de translations et, dans le cas de structures complexes, de sélectionner les ddls situés dans les régions les plus flexibles. Popplewed *et al.* [163] présentent un critère quantitatif reposant sur la sélection des ddls maîtres dans les zones à fortes énergies de déformations et contribuant fortement à l'énergie cinétique totale. Dans les travaux de Henshell et Ong [72] ou encore de Shah et Raymund [184], sont conservés les ddls dont le ratio  $k_{ii}/m_{ii}$  des termes diagonaux des matrices de raideur et de masse est minimum. Ce critère est bien adapté aux structures dont la géométrie et les caractéristiques mécaniques sont relativement uniformes. Si la distribution en masse est irrégulière, le risque est de concentrer les ddls maîtres dans les régions à fortes masses. Dans le cadre de la sous-structuration, Bouhaddi et Fillod [25] proposent une méthode de sélection *a priori* basée sur les propositions de Levy et Downs, c'est-à-dire que sont retenus les ddls internes de translations ayant les plus grands déplacements. La sélection est faite ddl par ddl avec une procédure exploitant à chaque pas, une réanalyse approchée de chaque sous-structure.

Pour finir, soulignons que la décomposition QR permet de sélectionner efficacement et à

moindre coup les ddls maîtres. Lallement et Ramanitranja [110, 166] utilisent cette méthode pour obtenir une matrice de Guyan employée lors d'une sélection des positions d'observation d'une structure lors d'essais dynamiques permettant de minimiser les erreurs dues à l'expansion des réponses mesurées. La procédure s'adapte aussi à la sous-structuration et se déroule comme suit. Les ddls candidats à la sélection sont les ddls internes de translations. Nous avons en effet constaté que la procédure est plus efficace lorsque seuls les ddls de translations sont considérés. Ceci correspond par ailleurs à la proposition de Downs. Soit  $\Phi_i^f$  la base complète des modes à interface fixe. Soit  $c$  le nombre de ddls candidats et  $m$  le nombre de ddls à retenir, nous nous intéressons alors à  $\Phi_{icm}^f \in \mathbb{R}^{c \times m}$ , base tronquée des modes à interface fixe restreinte aux ddls candidats. Notons que  $c$  et  $m$  doivent être tels que  $c > m$ . La décomposition QR porte sur la transposée de  $\Phi_{icm}^f$  et conduit à la factorisation [65]

$$\left(\Phi_{icm}^f\right)^T \Pi = Q R. \quad (2.51)$$

$Q$  est une matrice orthogonale  $m \times m$ ,  $R$  est une restriction d'une matrice triangulaire supérieure  $m \times c$  dont les valeurs absolues des termes diagonaux sont décroissantes et  $\Pi$  est une matrice de permutation  $c \times c$  des colonnes de  $\left(\Phi_{icm}^f\right)^T$ . Cette matrice de permutation localise les colonnes les plus indépendantes. Les  $m$  premières colonnes de cette matrice indiquent les  $m$  ddls maîtres internes à retenir.

Le domaine de validité d'un modèle réduit par la méthode de Guyan est limité aux basses fréquences. Ce domaine de validité fréquentiel peut être obtenu à l'aide de la résolution pour chaque sous-structure du problème aux valeurs propres du système restreint aux ddls esclaves

$$(\mathbf{K}_{ss} - \omega_v^2 \mathbf{M}_{ss}) \mathbf{y}_s = 0. \quad (2.52)$$

Wright et Miles [206] et Bouhaddi et Fillod [25] estiment que le modèle réduit donne des résultats acceptables dans la bande fréquentielle  $[0 ; f_{c_{\min}}/3]$ , où  $f_{c_{\min}}$  correspond à la plus petite des premières fréquences propres obtenues pour chaque sous-structure.

Nous proposons dans cette section une méthode de sélection des ddls maîtres basée sur l'utilisation d'un algorithme génétique – AG – nous permettant de trouver une famille optimale de ddls maîtres, ces ddls étant choisis de manière à maximiser la fréquence de coupure  $f_{c_{\min}}$ .

### 2.3.1 Méthode d'optimisation proposée

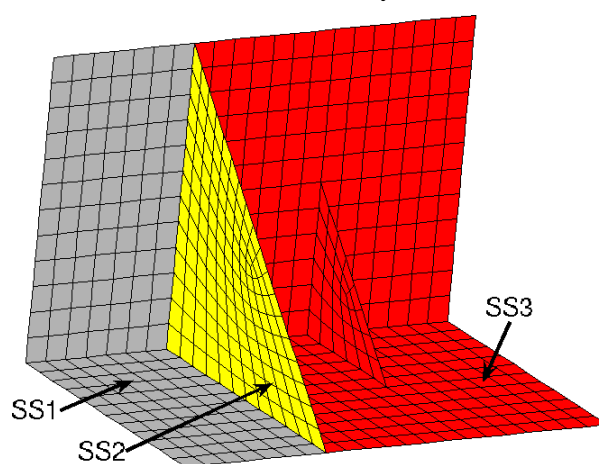
Nous devons résoudre un problème d'optimisation où les variables sont les ddls maîtres dont le nombre est fixé *a priori*. Pour chaque sous-structure, la fonction objectif à minimiser est  $(-f_c^i)$ , première fréquence propre du système esclave (2.52) associé à la configuration des ddls maîtres d'une sous-structure  $i$ . On peut aussi envisager de minimiser  $|f_{c_{\min}} - 3 \times f_{\max}|$ , avec  $f_{c_{\min}} = \min(f_c^1, \dots, f_c^i, \dots)$  et  $f_{\max}$  la borne supérieure du domaine de validité souhaitée pour le système réduit complet.

Un algorithme génétique est utilisé à cet effet [142] puisqu'il s'agit d'une méthode d'optimisation efficace pour traiter des problèmes à variables discrètes. L'inconvénient est que, comme dans beaucoup de problèmes d'optimisation, un nombre important d'évaluations

de la fonction objectif est nécessaire. Nous avons d'abord tenté de coupler cet algorithme avec une méthode de réanalyse approchée afin de prédire la première fréquence propre en fonction de la position de ddls internes bloqués. Pour d'autres problèmes, ce type de couplage a été utilisé dans des travaux tels que [79, 93, 192]. Ait Brik [2, 3] utilise notamment les PMC dans des problèmes d'optimisation multi-objectifs utilisant un algorithme NSGA – *Non Sorting Genetic Algorithm*. Quel que soit le type de métamodèle – polynômes, PMC, krigage, *etc.* – la précision du modèle approché n'a jamais été suffisante pour conduire à des résultats corrects. L'objectif a alors été de minimiser le temps de recherche de l'AG. Pour cela, plutôt qu'une population initiale aléatoire, nous utilisons les solutions obtenues à l'aide de la méthode QR comme point de départ de l'algorithme. Par exemple, si l'on choisit d'utiliser  $n_{\text{pop}}$  populations initiales et que  $m$  ddls internes sont recherchés, la première population est constituée des ddls indiqués par les  $m$  premières colonnes de  $\mathbf{\Pi}$ , la deuxième par les colonnes 1 et 3 à  $m+1$ , et ainsi de suite jusqu'à construire  $n_{\text{pop}}$  populations. Ceci permet d'avoir des populations variées mais dont un certain nombre conduisent à de bonnes solutions. La convergence de l'algorithme vers une bonne solution est alors grandement améliorée. Notons aussi que les ddls concernés pour la recherche sont les ddls internes de translations.

Pour initialiser l'AG, notre choix s'est porté sur la décomposition QR car les résultats se sont avérés bien meilleurs que les autres méthodes « simples ». Considérons dès maintenant le système illustré figure 2.31. Cette structure libre est composée de trois sous-structures notées SS1, SS2 et SS3, assemblées sur les mêmes ddls de jonction. Une modélisation avec des éléments coques à 6 ddls par noeud conduit à MEF complet à 4 272 ddls répartis en 1 050 ddls internes pour SS1, 792 ddls internes pour SS2, 2 280 ddls internes pour SS3 et 150 ddls de jonction. Les valeurs des premières fréquences propres  $f_c^i$  des différentes sous-structures bloquées aux ddls contraints et maîtres sont reportées dans le tableau 2.9. Quinze ddls maîtres internes ont été recherchés parmi les ddls de translations internes par les approches  $k_{ii}/m_{ii}$  et QR. La décomposition QR surpasse l'autre méthode pourtant très utilisée.

Nous continuons dans la section suivante l'analyse de cette structure.



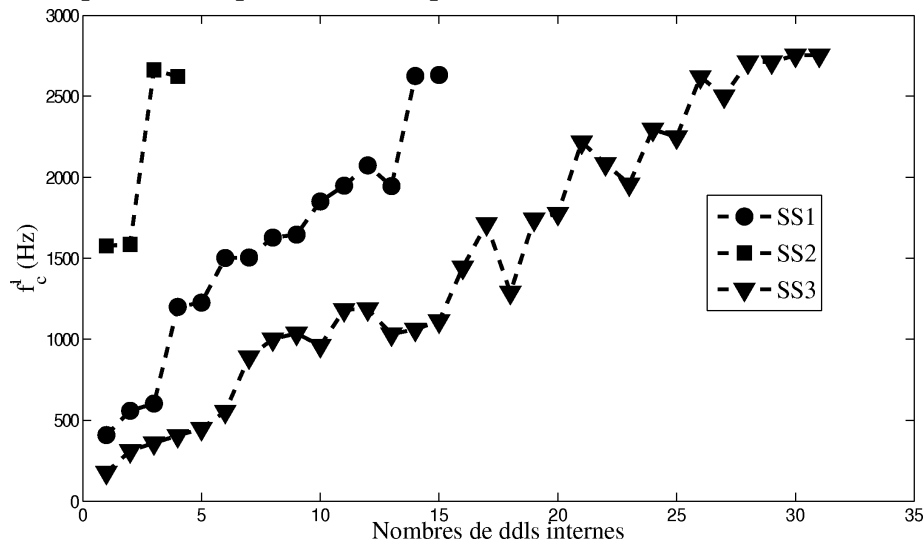
**Fig. 2.31** – Équerre divisée en trois sous-structures

**Tab. 2.9** – Comparaison de la première fréquence propre obtenue pour 15 ddls maîtres internes

	$k_{ii}/m_{ii}$	QR
SS1	1 544,5 Hz	2 631,9 Hz
SS2	794,5 Hz	7 296,6 Hz
SS3	479,3 Hz	1 111,8 Hz

### 2.3.2 Application

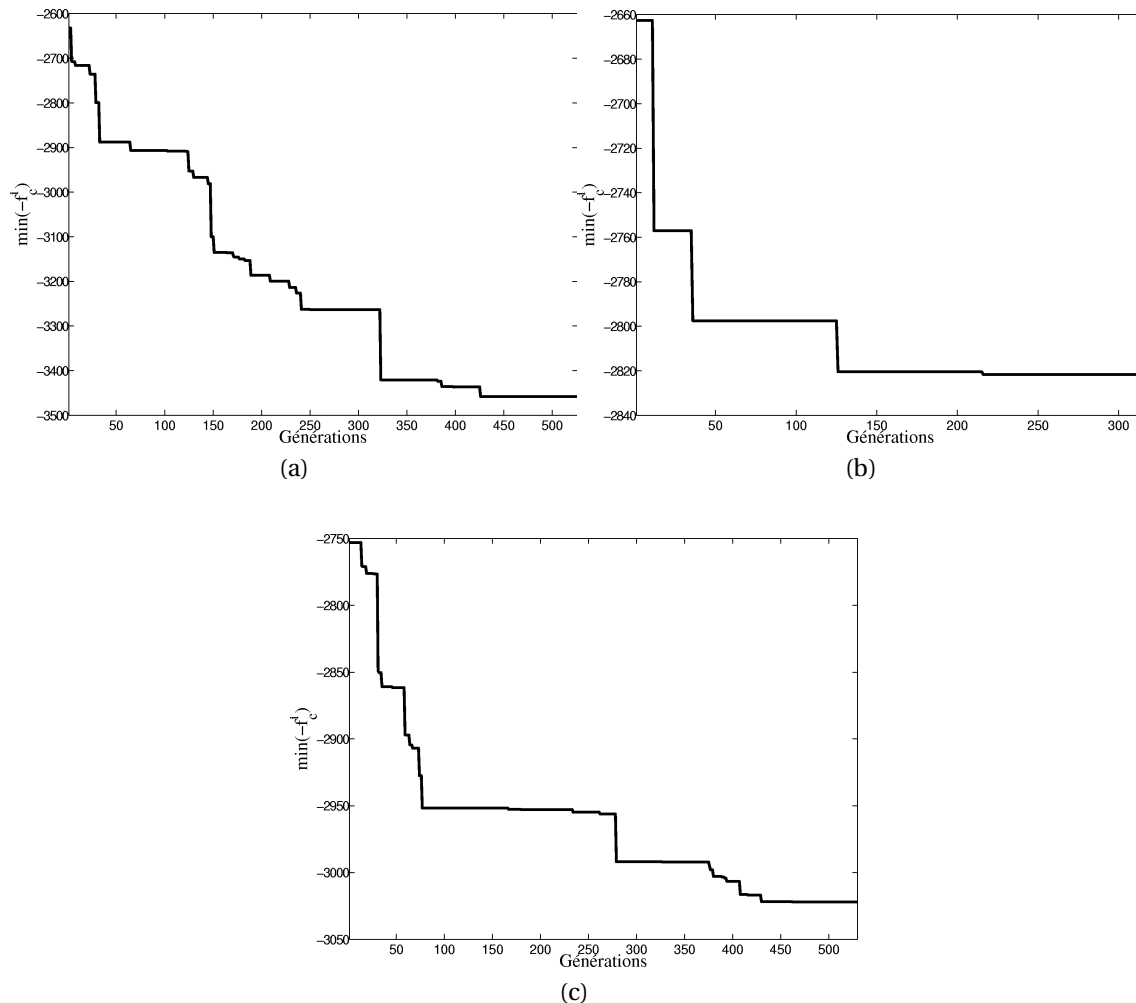
Nous nous intéressons ici à la condensation des sous-structures du système de plaques assemblées en formes d'équerre présenté figure 2.31 à partir de la seule transformation de Guyan. Nous souhaitons un modèle réduit prédictif pour les dix premiers modes, soit une bande fréquentielle allant jusqu'à environ 850 Hz. Pour déterminer le nombre de ddls maîtres à retenir, nous réalisons, en partant d'un seul ddl, des analyses QR en augmentant à chaque pas d'un ddl jusqu'à 2 800 Hz. Les évolutions des solutions obtenues sont illustrées figure 2.32. Nous remarquons que bien qu'irrégulière la fréquence augmente globalement avec le nombre de ddls. À partir de ces résultats, nous choisissons de rechercher 15 ddls maîtres internes pour SS1, 3 pour SS2 et 30 pour SS3.

**Fig. 2.32** – Évolution des solutions obtenues avec la décomposition QR

Parmi les populations initiales construites à partir de la matrice de permutation de la décomposition QR, les meilleures premières fréquences propres du système esclave sont respectivement 2 631,9 Hz pour SS1, 2 662,6 Hz pour SS2 et 2 752,87 Hz pour SS3. À ce stade de la sélection, le modèle réduit serait théoriquement prédictif jusqu'à  $2\,631,9/3 = 877,3$  Hz. Examinons si l'AG permet d'améliorer les résultats sans augmenter le nombre de ddls.

L'AG est paramétré avec 20 individus par génération, une probabilité de croisement de 0,8 et une probabilité de mutation de 0,05. Pour chaque sous-structure, la fonction à minimiser est  $(-f_c^i)$ . Les évolutions de  $\min(-f_c^i)$  en fonction du nombre de générations sont présentées figure 2.33. Les fréquences  $f_c^i$  obtenues avant et après optimisation sont reportées tableau 2.10. Nous constatons une forte amélioration pour SS1 et une augmentation de l'ordre de 200 Hz pour SS2 et SS3. Malheureusement, comme le domaine de validité est gouverné par  $f_{c_{\min}} = \min(f_c^{SS1}, f_c^{SS2}, f_c^{SS3})$ , la forte augmentation de  $f_c^{SS1}$  n'a que peu d'effet

sur l'extension du domaine validité. Après optimisation, nous avons  $f_{c_{\min}} = 2\,821,6$  Hz, donc le domaine utile du modèle réduit passe de  $2\,631,9/3 = 877,3$  Hz à  $2\,821,6/3 = 940,5$  Hz. La « borne »  $f_{c_{\min}}/3$  n'étant évidemment par stricte, le domaine de validité n'est pas étendu même après cette optimisation. Le tableau 2.11 confirme ceci.



**Fig. 2.33** – Évolutions des solutions de l'AG pour : (a) SS1 , (b) SS2, (c) SS3

**Tab. 2.10** –  $f_c^i$  avant et après optimisation par l'AG

	Avant	Après
SS1 (15 ddls internes)	2 631,9 Hz	3 458,3 Hz
SS2 (5 ddls internes)	2 662,6 Hz	2 821,6 Hz
SS3 (30 ddls internes)	2 752,9 Hz	3 022,1 Hz

La réduction de Guyan est ensuite réalisé sur les ddls maîtres sélectionnés. Le tableau 2.11 permet de comparer les solutions propres obtenues avec le modèle exact et réduit pour les onze premières fréquences non nulles. Nous constatons que le domaine de validité n'a pas augmenté après optimisation mais que par contre le modèle réduit après optimisation est légèrement plus précis. Au vu des résultats de cet exemple, le coût de calcul de l'AG – environ deux heures – ne semble pas vraiment justifié. Cependant, nous observons qu'il est possible d'améliorer les résultats de la décomposition QR avec un AG.

**Tab. 2.11** – Comparaison de la précision de « Guyan QR » et de « Guyan AG »

Modes	Fréquence Exact	Guyan QR			Guyan AG		
		$\epsilon_f$	$\epsilon_y$	$MAC_y$	$\epsilon_f$	$\epsilon_y$	$MAC_y$
7	151,83	0,065	0,006	99,99	0,039	0,004	99,99
8	263,86	0,232	0,015	99,97	0,176	0,012	99,98
9	325,45	0,298	0,018	99,96	0,131	0,010	99,99
10	342,45	0,252	0,015	99,97	0,181	0,012	99,98
11	535,61	0,623	0,029	99,91	0,653	0,031	99,90
12	579,36	0,717	0,045	99,80	0,649	0,031	99,90
13	652,07	1,491	0,069	99,52	0,794	0,046	99,78
14	664,83	0,751	0,043	99,81	0,727	0,045	99,79
15	732,16	1,156	0,060	99,63	0,765	0,038	99,85
16	840,35	1,562	0,072	99,48	1,029	0,055	99,69
17	935,04	1,516	0,071	99,50	2,073	0,096	99,08

### 2.3.3 Conclusion

Nous avons proposé dans cette section une méthodologie consistant à optimiser le choix des ddls maîtres de la condensation de Guyan. Parmi les méthodes simples permettant de choisir judicieusement ces ddls, la décomposition QR réalisée sur la base modale réduite aux ddls de translations internes a montré la plus grande efficacité. Bien que déjà excellents, nous avons montré qu'il est possible d'améliorer ces résultats en utilisant une méthode d'optimisation permettant de travailler avec des variables discrètes. L'approche AG a été considérée dans ce travail. L'exemple proposé utilise la simple condensation de Guyan, mais la méthode peut évidemment être appliquée à Craig-Bampton. La méthodologie concerne aussi la condensation sans sous-structuration.





# Aide à la décision pour l'identification et la planification d'essais

## Sommaire

<b>3.1 Introduction . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>3.2 Identification paramétrique avec données incertaines . . . . .</b>	<b>97</b>
3.2.1 Théorie générale des problèmes inverses . . . . .	97
3.2.2 Analyse de Monte Carlo . . . . .	101
3.2.3 Remarques sur la convergence . . . . .	102
3.2.4 Utilisation des métamodèles . . . . .	104
3.2.5 Application . . . . .	104
<b>3.3 Planification d'essais pour le gain d'informations . . . . .</b>	<b>113</b>
3.3.1 Plan d'expérience bayésien . . . . .	113
3.3.2 Traitement numérique . . . . .	115
3.3.3 Applications . . . . .	117
<b>3.4 Conclusion . . . . .</b>	<b>126</b>

Nous présentons dans ce chapitre des techniques permettant de faciliter la résolution de problèmes inverses. Dans un premier temps, la formulation du problème inverse utilisée est présentée puis employée pour l'identification paramétrique. Dans un deuxième temps, la planification d'essais en vue d'un gain d'information sur les paramètres d'intérêt est abordée. Pour cela, nous proposons d'utiliser les plans d'expérience bayésiens.

## 3.1 Introduction

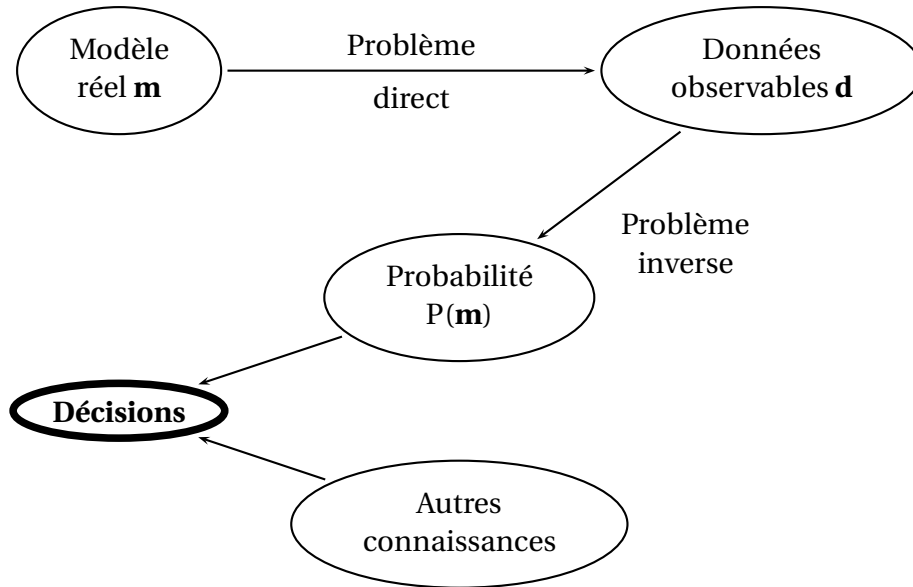
Le comportement de structures mécaniques réelles peut être étudié en détail via des simulations basées sur un modèle numérique de la structure considérée. Cependant, la crédibilité de ces résultats doit être établie au préalable et éventuellement être améliorée en utilisant des mesures expérimentales sur le système réel de façon à valider le modèle pour une application spécifique. Si les prédictions du modèle sont significativement différentes de celles observées sur la structure réelle, il est nécessaire d'essayer de localiser et de comprendre ce qui est mal représenté dans le modèle pour ensuite essayer de le corriger. La première étape consiste donc à localiser les erreurs de modélisation et/ou à déterminer les paramètres influents. Différentes méthodes ont été présentées dans le premier chapitre de ce mémoire afin de déterminer un ensemble de paramètres influents. Ensuite, nous sommes face à un problème inverse, où étant données des mesures issues par exemple de l'analyse modale expérimentale, nous cherchons une meilleure estimation des valeurs des paramètres du modèle. Ces mesures expérimentales contiennent en général des incertitudes dues, par exemple, aux conditions environnementales, à la précision des instruments de mesures ou bien à l'expérimentateur lui-même.

Nous avons précisé dans l'introduction générale que la structure du modèle peut être déterministe ou stochastique. Nous nous intéressons ici aux modèles dont la structure est déterministe. La même distinction peut être faite en ce qui concerne la résolution du problème inverse. Nous ferons ainsi la différence entre :

- le problème inverse déterministe où les paramètres du modèle sont ajustés afin de rendre les prédictions du modèle en accord avec les mesures expérimentales. On retrouve ici les méthodes classiques de recalage de modèle dont le principe repose en général sur la minimisation d'une fonction coût. Nous discuterons un peu plus en détails de ces méthodes en section 4.2 ;
- le problème inverse probabiliste où l'on cherche à identifier une distribution de probabilité sur les paramètres du modèle.

Bien que les méthodes de recalage déterministe puissent prendre en compte les incertitudes expérimentales, en appliquant par exemple un coefficient de pondération sur les termes de la fonction coût [193] ou en rajoutant dans la fonction coût un terme de régularisation [1, 129], l'approche probabiliste sera utilisée dans cette étude puisqu'elle nous semble plus adaptée à l'identification dans un environnement incertain. L'approche probabiliste du problème inverse en mécanique est par ailleurs un axe de recherche très actuel [15, 57, 88, 130, 150, 157].

Une formulation probabiliste sur les données et les paramètres du modèle est donc nécessaire. Dans cette étude, nous utilisons la théorie générale des problèmes inverses développée par Tarantola [196]. Cette théorie n'est pas strictement basée sur le théorème de Bayes mais sur la notion de conjonction d'état d'information. L'information *a priori* sur les paramètres du modèle, l'information expérimentale mais aussi l'information sur la théorie sont combinées pour obtenir une densité de probabilité *a posteriori* sur les données et sur les paramètres du modèle. Le résultat de l'analyse sera donc une densité de probabilité sur ces paramètres. La philosophie générale de la résolution du problème inverse choisie est illustrée par la figure 3.1 tirée de [177].



**Fig. 3.1** – Problème inverse et prise de décision

Puisque nous avons besoin de données expérimentales et que les essais expérimentaux peuvent coûter chers, il est important d'évaluer *a priori* quels tests seraient les plus utiles, c'est-à-dire, les plus informatifs. Comme nous l'avons déjà évoqué, les mesures sont souvent bruitées. Par conséquent, nous devons résoudre deux problèmes, à savoir, concevoir des expérimentations informatives et prendre en compte les incertitudes expérimentales.

Proposés à l'origine par Lindley [118], les plans d'expérience bayésiens ou *Bayesian experimental design* (BED), offrent un cadre pour résoudre notre problème. En effet, le but des BED est de maximiser le gain d'information d'une expérience dont les résultats sont décrits par une fonction de densité de probabilité. Une fonction d'utilité décrivant le but de l'expérience, en fait le gain d'information, est définie, et nous cherchons l'expérience maximisant cette fonction d'utilité. La connaissance *a priori* sur les paramètres est combinée avec la densité de probabilité des sorties du test via le théorème de Bayes [13] pour obtenir une densité *a posteriori* sur les paramètres. Classiquement, la fonction d'utilité utilise une mesure d'information telles que l'entropie de Shannon [185] ou bien la distance de Kullback-Leibler [104]. Plus de généralités sur les BED peuvent être trouvées dans [201]. Les BED ont été appliqués dans divers domaines, comme la géophysique [199], la physique nucléaire [55] ou encore l'économétrie [128]. L'utilisation des BED dans la cadre de la planification d'essais dynamiques est l'objet de la seconde section.

## 3.2 Identification paramétrique avec données incertaines

### 3.2.1 Théorie générale des problèmes inverses

Nous entendons par problème inverse la démarche qui consiste à identifier des paramètres caractéristiques  $\mathbf{m}$  d'un système physique à partir de mesures  $\mathbf{d}$  effectuées sur ce système. Nous adoptons dans cette étude la formulation des problèmes inverses développée par Tarantola depuis une vingtaine d'année [196]. Bien que principalement développée autour de problèmes géophysiques, cette formulation s'applique à tous les systèmes phy-

siques en général. Habituellement, la vision probabiliste des problèmes inverses est une vision bayésienne basée sur les probabilités conditionnelles. Si  $P(\mathbf{m})$  est la densité de probabilité *a priori* sur les paramètres  $\mathbf{m}$ , si  $P(\mathbf{d}|\mathbf{m})$  est la probabilité conditionnelle de  $\mathbf{d}$  sachant  $\mathbf{m}$  alors la probabilité conditionnelle *a posteriori* de  $\mathbf{m}$  sachant  $\mathbf{d}$  est donnée selon le théorème de Bayes [13] par

$$P(\mathbf{m}|\mathbf{d}) = \frac{P(\mathbf{m}) P(\mathbf{d}|\mathbf{m})}{\int_{\mathcal{M}} P(\mathbf{m}) P(\mathbf{d}|\mathbf{m}) d\mathbf{m}} = \frac{P(\mathbf{m}) P(\mathbf{d}|\mathbf{m})}{P(\mathbf{d})}. \quad (3.1)$$

Dans un contexte expérimental,  $P(\mathbf{d}|\mathbf{m})$  décrit les incertitudes sur les données observées.  $P(\mathbf{d}|\mathbf{m})$  est plus généralement appelée fonction de vraisemblance – *likelihood function* – et mesure la distance entre les données réelles et les données réellement observées.

Tarantola montre dans ses travaux que cette approche conventionnelle qui consiste à utiliser les densités de probabilités conditionnelles peut conduire à certaines difficultés notamment lorsque l'on travaille dans des espaces non-linéaires. Il a donc développé une notion plus générale basée sur la notion de conjonction de probabilités où le théorème de Bayes apparaît comme un cas particulier. Cette formulation peut être vue comme une adaptation de la théorie mathématique aux problèmes de la physique [160]. Ajoutons que Tarantola [197] juge préférable de ne pas déduire les modèles à partir des observations mais plutôt d'inventer un ensemble de modèles à partir de son intuition ou de ses connaissances *a priori* et d'utiliser les observations pour écarter les modèles non acceptables.

Nous n'entrerons pas ici dans les détails de la théorie mais nous exposerons les éléments s'appliquant à notre étude. Les notations choisies dans cette présentation sont fortement inspirées de celles utilisées par Tarantola.

Supposons que nous soyons en mesure de modéliser un système mécanique par un modèle mathématique. Dans notre cas, ce modèle sera un MEF. Soit  $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_{n_m}\} \in \mathcal{M}$  un ensemble de  $n_m$  paramètres  $m_k$  décrivant le MEF. Soit  $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_{n_d}\} \in \mathcal{D}$  un ensemble de  $n_d$  données observables  $d_k$ . Ces données observables sont les mesures que l'on envisage de réaliser expérimentalement mais qui pourront aussi être simulées par un MEF de référence.  $\mathbf{x} = \{\mathbf{d}, \mathbf{m}\} = \{d_1, \dots, d_{n_d}, m_1, \dots, m_{n_m}\} \in \mathcal{X} = \mathcal{D} \times \mathcal{M}$  est l'ensemble de tous ces paramètres.

Le problème direct, c'est-à-dire l'application reliant les variables d'entrées  $\mathbf{m}$  aux variables de sorties  $\mathbf{d}$  peut être exprimé par

$$\mathbf{d} = \mathbf{g}(\mathbf{m}). \quad (3.2)$$

L'opérateur direct  $\mathbf{g}(\cdot)$  représente le modèle mathématique du système étudié. Dans notre contexte,  $\mathbf{g}(\cdot)$  est l'analyse modale du MEF modélisant le système physique.

Comme dans le problème inverse bayésien classique, nous traduisons la connaissance *a priori* sur  $\mathbf{m}$  par une densité *a priori*  $\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$  et les données bruitées mesurées par une densité  $\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$ . Cependant, une incertitude supplémentaire peut être prise en compte. En effet, le modèle représenté par  $\mathbf{g}(\cdot)$  peut ne pas être parfait puisque le processus de modélisation peut ne pas représenter des propriétés du système. Par conséquent, il apparaît nécessaire de décrire les incertitudes de modélisation. Ainsi, la densité  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  représente les incertitudes sur la théorie dans la relation entre  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{d}$ .

L'information *a priori* sur  $\mathbf{x}$  peut être exprimée dans l'espace  $\mathcal{X}$  par la densité de proba-

bilité conjointe

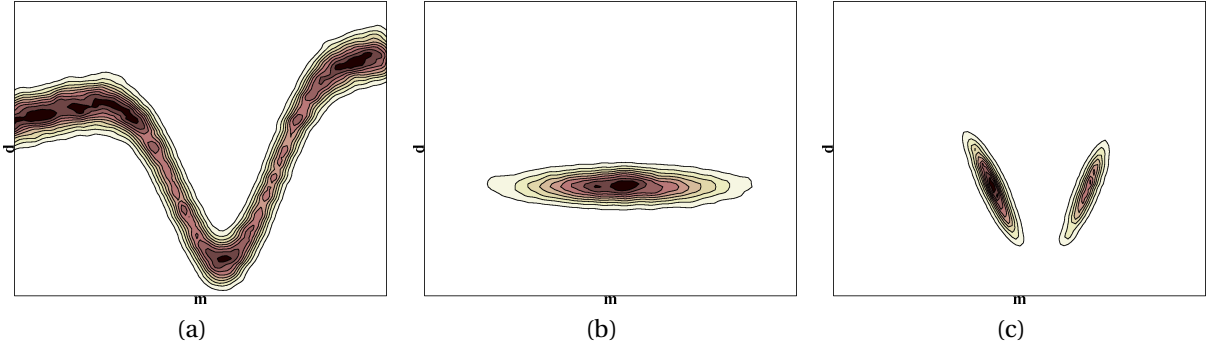
$$\rho(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}). \quad (3.3)$$

Nous supposons ici que l'information *a priori* sur  $\mathbf{m}$  est indépendante des mesures.

Finalement, nous avons deux sortes d'information dans l'espace  $\mathcal{X}$  : la densité *a priori*  $\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  représentant l'information obtenue sur les données observables  $\mathbf{d}$  ainsi que la connaissance *a priori* sur  $\mathbf{m}$ , et la densité sur la théorie  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$ . Tarantola combine ces deux états d'information pour obtenir l'état d'information *a posteriori*. À une constante de normalisation près, cette conjonction d'état d'information est représentée par une densité de probabilité  $\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  définie par

$$\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \propto \frac{\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m}) \Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})}{\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})}. \quad (3.4)$$

Cette conjonction d'information est illustrée par la figure 3.2.



**Fig. 3.2** – La conjonction de l'information issue de la théorie  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  (a) et de l'information *a priori*  $\rho(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  (b) permet d'obtenir l'information *a posteriori*  $\sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  (c)

Dans l'équation (3.4),  $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  représente l'état d'information homogène. La densité de probabilité homogène  $\mu(\mathbf{u})$  d'un paramètre  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$  est « la densité de probabilité qui associe à chaque région de l'espace une probabilité proportionnelle au volume de la région » [148]. La densité de probabilité homogène dépend de la métrique définie sur l'espace des paramètres. En pratique, nous considérons que les espaces  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{X}$  sont vectoriels et donc les densités homogènes sont constantes sur ces espaces. Comme nous supposons que  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{d}$  sont indépendants, il en résulte que  $\mu(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \mu_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$ , où  $\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$  et  $\mu_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$  sont respectivement la densité homogène de  $\mathbf{d}$  et de  $\mathbf{m}$ .

L'intégration de l'équation (3.4) sur  $\mathcal{D}$  donne la densité de probabilité marginale *a posteriori* sur les paramètres du modèle

$$\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) = \int_{\mathcal{D}} \sigma(\mathbf{d}, \mathbf{m}) d\mathbf{d}. \quad (3.5)$$

Si on suppose que la théorie mathématique ne fournit pas d'information sur les paramètres du modèle  $\mathbf{m}$  mais de l'information sur  $\mathbf{d}$  sachant  $\mathbf{m}$ , alors  $\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m})$  peut être écrite

$$\Theta(\mathbf{d}, \mathbf{m}) = \theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) \mu_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}). \quad (3.6)$$

Ainsi, après simplification, l'équation (3.5) devient

$$\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \propto \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} d\mathbf{d}. \quad (3.7)$$

Cette expression peut être réécrite

$$\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \propto \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) L(\mathbf{m}). \quad (3.8)$$

$L(\mathbf{m})$  est la fonction vraisemblance telle que

$$L(\mathbf{m}) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \theta(\mathbf{d}|\mathbf{m})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} d\mathbf{d}. \quad (3.9)$$

Nous rappelons que  $L(\mathbf{m})$  mesure la distance entre les données prédites par le modèle et les données réellement observées.

Parrenin [160] explicite aussi le cas de la densité de probabilité marginale *a posteriori* sur les données observables. Il trouve

$$\sigma_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \propto \frac{\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{D})}{\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})} \int_{\mathcal{M}} \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) d\mathbf{m}. \quad (3.10)$$

Nous allons maintenant définir les deux cas qui se présentent dans notre étude. Si les incertitudes de modélisation sont négligeables, alors la théorie est exacte et

$$\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) = \delta(\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m})), \quad (3.11)$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac. Considérant que  $\mu_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$  est constante, la nouvelle expression pour l'équation (3.7) est

$$\sigma_{\mathcal{M}}^E(\mathbf{m}) \propto \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}). \quad (3.12)$$

L'équation (3.10) devient [160]

$$\sigma_{\mathcal{D}}^E(\mathbf{D}) \propto \rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{D}) \int_{\mathcal{M}} \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \delta(\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m})) d\mathbf{m}. \quad (3.13)$$

On remarquera ici que nous sommes dans le cas classique de l'inférence bayésienne et que  $\sigma_{\mathcal{M}}^E(\mathbf{m})$  représente la probabilité conditionnelle de  $\mathbf{m}$  sachant les observations  $\mathbf{d}$ .

Le second cas apparaît lorsque les incertitudes sur les expériences et sur le modèle sont gaussiennes. Soient  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  les valeurs observées sur un ensemble de points de mesures. En considérant que les incertitudes dues aux mesures sont indépendantes des vraies données observables  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  est liée à  $\mathbf{d}$  par la relation

$$\mathbf{d}^{\text{obs}} = \mathbf{d} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad (3.14)$$

où  $\boldsymbol{\epsilon}$  est un vecteur d'erreurs décrit par la densité  $f(\boldsymbol{\epsilon})$ . Dans ce cas

$$\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = f(\boldsymbol{\epsilon}) = f(\mathbf{d}^{\text{obs}} - \mathbf{d}). \quad (3.15)$$

Pour des erreurs gaussiennes avec une moyenne nulle et covariance  $\mathbf{C}_d$ , l'équation (3.15) devient

$$\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{\text{obs}})^T \mathbf{C}_d^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{\text{obs}})\right). \quad (3.16)$$

De plus, si l'on considère que les incertitudes sur la théorie sont gaussiennes avec une matrice de covariance  $\mathbf{C}_t$ ,

$$\theta(\mathbf{d}|\mathbf{m}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))^T \mathbf{C}_t^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{g}(\mathbf{m}))\right). \quad (3.17)$$

Dans ce cas, il est démontré dans [196] que

$$\sigma_{\mathcal{M}}^G(\mathbf{m}) \propto \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{\text{obs}})^T \mathbf{C}_D^{-1} (\mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{\text{obs}})\right), \quad (3.18)$$

avec  $\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_t + \mathbf{C}_d$ .

Si  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \dots \times \mathcal{M}_{n_m}$ , la densité marginale *a posteriori*  $\sigma_{m_k}(m_k)$  du paramètre du modèle  $m_k$  est

$$\sigma_{m_k}(m_k) = \int \dots \int_{\mathcal{M}_1} \int_{\mathcal{M}_{k-1}} \int_{\mathcal{M}_{k+1}} \dots \int_{\mathcal{M}_{n_m}} \sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \, dm_1 \dots dm_{k-1} dm_{k+1} \dots dm_{n_m}. \quad (3.19)$$

De même, la densité marginale *a posteriori*  $\sigma_{d_k}(d_k)$  de la donnée observable  $d_k$  est obtenue par l'intégration

$$\sigma_{d_k}(d_k) = \int \dots \int_{\mathcal{D}_1} \int_{\mathcal{D}_{k-1}} \int_{\mathcal{D}_{k+1}} \dots \int_{\mathcal{D}_{n_d}} \sigma_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) \, dd_1 \dots dd_{k-1} dd_{k+1} \dots dd_{n_d}. \quad (3.20)$$

Il reste ensuite à déterminer ces densités *a posteriori*. Nous constatons que les expressions (3.19) ou encore (3.20) impliquent des intégrations multiples sur l'espace du modèle et des données. Nous n'aurons pas en général une expression explicite de  $\sigma_{m_k}(m_k)$ . Le calcul direct étant souvent impossible, il est préférable de travailler avec des échantillons approximativement distribués selon  $\sigma_{m_k}(m_k)$  ou  $\sigma_{d_k}(d_k)$ . Ceci peut être effectué par une méthode de Monte Carlo que nous présentons dans le paragraphe suivant.

### 3.2.2 Analyse de Monte Carlo

Les densités *a posteriori* peuvent être estimées grâce à une simulation de Monte Carlo utilisant les chaînes de Markov – *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC). Une méthode MCMC pour la simulation d'une densité  $f(x)$  est une méthode produisant une chaîne de Markov ergodique dont la distribution stationnaire est  $f(x)$ . Une chaîne de Markov est une séquence où chaque valeur dépend seulement de la précédente valeur.

Comme proposé dans [148], un algorithme de type Metropolis-Hastings [141] est utilisé dans ce travail. Cet algorithme échantillonne les densités  $\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$  et  $\sigma_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$ . L'idée est de réaliser une marche aléatoire sur l'espace des paramètres du modèle  $\mathcal{M}$  en utilisant une règle probabiliste pour modifier cette marche. En acceptant ou en rejetant le déplacement proposé, la marche aléatoire échantillonne la densité cible. L'algorithme échantillonnant la



densité *a posteriori*  $\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$  est le suivant :

1. Initialiser à un modèle arbitraire  $\mathbf{m}^n$ . Calculer  $\rho_{\mathbf{m}^n} = \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}^n)$ ,  $\mathbf{d}^n = \mathbf{g}(\mathbf{m}^n)$  et  $L_{\mathbf{m}^n} = L(\mathbf{m}^n)$ .
2. Générer un nouveau modèle  $\mathbf{m}^c = \mathbf{m}^n + \delta$ , où  $\delta$  est un pas aléatoire. Calculer  $\rho_{\mathbf{m}^c} = \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}^c)$ .
3. Si  $\rho_{\mathbf{m}^c} \geq \rho_{\mathbf{m}^n}$ , accepter le modèle. Si  $\rho_{\mathbf{m}^c} < \rho_{\mathbf{m}^n}$ , décider aléatoirement d'accepter le modèle avec une probabilité d'acceptation  $\rho_{\mathbf{m}^c} / \rho_{\mathbf{m}^n}$ . Dans le cas contraire aller à l'étape 2. Si le modèle est accepté, poser  $\mathbf{m}^n = \mathbf{m}^c$ ,  $\rho_{\mathbf{m}^n} = \rho_{\mathbf{m}^c}$  et aller à l'étape 4.
4. Calculer  $\mathbf{d}^c = \mathbf{g}(\mathbf{m}^c)$  et  $L_{\mathbf{m}^c} = L(\mathbf{m}^c)$ . Si  $L_{\mathbf{m}^c} \geq L_{\mathbf{m}^n}$ , le modèle est accepté. Si  $L_{\mathbf{m}^c} < L_{\mathbf{m}^n}$ , décider aléatoirement d'accepter le modèle avec une probabilité d'acceptation  $L_{\mathbf{m}^c} / L_{\mathbf{m}^n}$ . Dans le cas contraire aller en 2. Si le modèle est accepté, poser  $L_{\mathbf{m}^n} = L_{\mathbf{m}^c}$ , sauver  $\mathbf{m}^n$  et aller en 2.

On trouvera l'organigramme de cet algorithme en annexe C.

Il est montré dans [148] que cet algorithme permet d'obtenir :

- des échantillons  $\{\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \dots, \mathbf{m}^{(n_s)}\}$  de  $\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$  ;
- des échantillons  $\{\mathbf{d}^{(1)}, \mathbf{d}^{(2)}, \dots, \mathbf{d}^{(n_s)}\}$  de  $\sigma_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$ .

Chaque  $\mathbf{d}^{(k)}$  correspond aux paramètres de modèle  $\mathbf{m}^{(k)}$ . Chaque  $\mathbf{m}^{(j)}$  est un ensemble de paramètres du modèle  $\{m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \dots, m_{n_m}^{(j)}\}$ . Les échantillons  $\{m_k^{(1)}, \dots, m_k^{(j)}, \dots, m_k^{(n_s)}\}$  sont obtenus de  $\sigma_{m_k}(m_k)$  en collectant chaque  $m_k^{(j)}$  de l'ensemble  $\mathbf{m}^{(j)}$ .

Étant donnée la séquence  $\{m_k^{(1)}, \dots, m_k^{(j)}, \dots, m_k^{(n_s)}\}$ , nous estimons  $\sigma_{m_k}(m_k)$  d'un manière non-paramétrique avec la fonction `ksdensity.m` de Matlab<sup>®</sup> [136] basée sur un noyau gaussien et une fenêtre de lissage optimale pour l'estimation de densités normales. De la même manière, les densités  $\sigma_{d_k}(d_k)$  pourront aussi être calculées.

### 3.2.3 Remarques sur la convergence

Avec l'utilisation d'un algorithme de MCMC, le problème est de savoir quand la convergence est rencontrée. Pouvons nous contrôler la convergence de l'algorithme facilement ? La réponse est clairement non. On pourra constater dans [168] que diverses méthodes de contrôle existent pour vérifier les trois critères de convergence généraux, (i) la convergence vers la distribution cible, (ii) la convergence vers les moyennes comme l'équation (3.39) et (iii) la convergence vers des échantillons i.i.d.

Le contrôle de la convergence des moyennes (ii) est généralement fait en observant la convergence du graphe de la moyenne empirique pour les  $m_k$ ,

$$\hat{\mu}_{n_s}^t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t m_k^{(i)}, \quad t = 1, \dots, n_s. \quad (3.21)$$

En plus de ce contrôle, nous utilisons dans nos applications une seconde méthode graphique pour tester la convergence (ii), la méthode des sommes cumulatives ou *cumulative sums* (Cusum) proposée dans [209]. Si  $\hat{\mu}_{n_s}^{n_s}$  est la moyenne finale, nous pouvons détecter des problèmes de convergence en traçant les différences partielles

$$\hat{S}_{n_s}^t = \sum_{i=1}^t \left( m_k^{(i)} - \hat{\mu}_{n_s}^{n_s} \right), \quad t = 1, \dots, n_s. \quad (3.22)$$

Qualitativement, une évolution irrégulière et centrée autour de zéro de  $\hat{S}_{n_s}^t$  en fonction de  $t$  indique une convergence rapide de la chaîne. Un graphe lisse avec de longues excursions loin de zéro indique une convergence lente. Par graphe lisse, nous entendons une juxtaposition de segments de pentes voisines. Par graphe irrégulier, nous entendons une juxtaposition de segments de pentes alternativement positives et négatives [28]. Quantitativement, Brooks [28] propose un indice de « *hairiness* » en définissant pour  $2 \leq t \leq n_s$  et  $i = 1, \dots, n_s - 1$

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{S}_{n_s}^{i-1} > \hat{S}_{n_s}^i \text{ et } \hat{S}_{n_s}^i < \hat{S}_{n_s}^{i+1} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (3.23)$$

Ensuite, l'indice

$$D_{n_s}^t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{t-1} d_i, \quad 2 \leq t \leq n_s \quad (3.24)$$

est calculé.  $D_{n_s}^t$  prend la valeur 0 pour un graphe totalement lisse et la valeur 1 pour un graphe irrégulier. L'observation de l'évolution de  $D_{n_s}^t$  donne des informations intéressantes sur la convergence de la chaîne.

Les évolutions des moyennes et des graphes Cusum nous aident donc à déterminer si la convergence est atteinte. Quand celle-ci semble atteinte depuis un grand nombre d'échantillons, comme conseillé dans [147], nous observons l'évolution de la fonction de vraisemblance  $L(\mathbf{m}, \eta)$  en vue de décider quels échantillons retenir. En effet, l'algorithme de Monte Carlo présenté ne produit pas des échantillons strictement i.i.d. Nous verrons plus loin que ces échantillons sont utilisés pour calculer des intégrales. Il est donc nécessaire que ces échantillons soient i.i.d ou quasi-i.i.d. Pour sélectionner approximativement des  $\mathbf{m}^{(k)}$  quasi-i.i.d, nous procédons comme suit. Les  $N$  derniers échantillons tirés sont retenus. Dans une boucle, une fonction Matlab<sup>®</sup> [136] est utilisée pour tester l'aléatoire de la séquence d'observation. Initialement, les  $N$  échantillons sont proposés. Si l'hypothèse de séquence aléatoire n'est pas vérifiée, seul un échantillon sur deux est proposé. Avec cette nouvelle séquence, si l'hypothèse n'est encore pas vérifiée, seul un échantillon sur trois est proposés et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'hypothèse soit vérifiée. Les  $\mathbf{m}^{(k)}$  retenus sont ensuite utilisés pour les calculs envisagés. Avec cette méthode, l'indépendance des échantillons n'est pas totalement garantie. Comme la précision des calculs n'est pas fondamentale dans cette étude, cette approche nous paraît suffisante.

Le dernier point de cette discussion est le problème de la maximisation de l'efficacité de l'algorithme. Ici, le paramètre à optimiser est la taille des perturbations durant la marche aléatoire. En effet, la longueur du pas aléatoire influence le taux d'acceptation des règles de Metropolis et l'efficacité de l'algorithme. Si le taux d'acceptation est grand, l'espace du modèle est décrit trop lentement ; s'il est petit, nous passons du temps à tester des modèles qui sont rejetés. Comme aucune règle générale ne peut être donnée, quelques simulations sont effectuées avec un petit nombre d'échantillons et le pas est réglé de façon à retenir un pourcentage acceptable de modèles proposés. [60] propose un taux d'acceptation entre 23 % pour un grand nombre de paramètres et 44 % pour un seul paramètre. Le pas aléatoire sera généré dans nos calculs à partir d'une densité gaussienne avec une moyenne nulle et une matrice de covariance diagonale. Aucune corrélation entre les paramètres n'est donc

introduite.

### 3.2.4 Utilisation des métamodèles

Le nombre de calculs est le principal inconvénient avec les simulations de Monte Carlo. Pour obtenir une approximation de la convergence, beaucoup d'itérations sont nécessaires avec une ou plusieurs analyses modales du MEF pour chaque itération. Quand le nombre de ddls du MEF est élevé ou pour des problèmes complexes comme l'analyse non-linéaire, la méthodologie proposée est pratiquement inapplicable et ce malgré la puissance des ordinateurs actuels. À titre d'exemple, si à chaque pas de l'algorithme l'analyse du MEF prend trois minutes, 100 000 itérations peuvent durer plus de six mois. Il est alors indispensable de remplacer l'analyse exacte du MEF par une approche par métamodèle pour réduire les temps de calcul. Une présentation de diverses approches a été réalisée section 1.4.

Si un métamodèle est utilisé, les incertitudes sur la théorie indiquées dans le paragraphe 3.2.1 sont naturellement introduites. Ainsi, si des incertitudes gaussiennes sont supposées à la fois pour les données expérimentales et la théorie, l'équation (3.18) est utilisée comme densité *a posteriori*. Elle peut être réécrite

$$\sigma_{\mathcal{M}}^G(\mathbf{m}) \propto \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \mathbf{g}(\mathbf{m}, \boldsymbol{\eta}) - \mathbf{d}^{\text{obs}} \right)^T \mathbf{C}_D^{-1} \left( \mathbf{g}(\mathbf{m}) - \mathbf{d}^{\text{obs}} \right) \right). \quad (3.25)$$

Rappelons que  $\mathbf{C}_D = \mathbf{C}_t + \mathbf{C}_d$  avec  $\mathbf{C}_d$  la matrice de covariance des incertitudes expérimentales et  $\mathbf{C}_t$  la matrice de covariance des incertitudes sur la théorie.  $\mathbf{C}_t$  est construite avec les données d'apprentissage qui contiennent différents couples entrées-réponses. Les erreurs entre les sorties de référence et les valeurs prédites par le réseau après sa création sont utilisées pour décrire la statistique des incertitudes sur la théorie. Pour chaque couple entrée-réponse  $(\mathbf{m}^{(k)}, d_i^{(k)})$  de la base d'apprentissage, la prédiction du métamodèle  $\hat{d}_i^{(k)}$  de  $d_i^{(k)}$  sert à calculer l'erreur  $\varepsilon_i = \hat{d}_i^{(k)} - d_i^{(k)}$ .  $\mathbf{C}_t$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les variances  $\varepsilon_i$ . Généralement, l'hypothèse gaussienne sur les incertitudes est théoriquement bien adaptée.

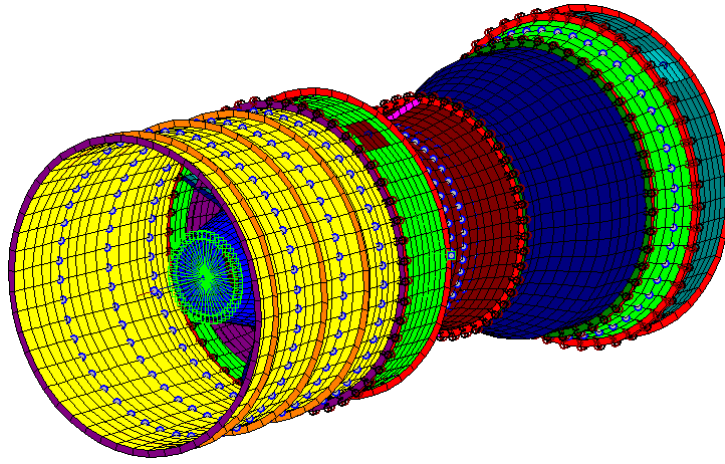
Si le MEF peut être rapidement évalué, il n'est alors pas nécessaire d'utiliser un métamodèle et la théorie est exacte. Dans ce cas, l'équation (3.12) sera exploitée

$$\sigma_{\mathcal{M}}^E(\mathbf{m}) \propto \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) \rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}).$$

### 3.2.5 Application

Nous allons illustrer la méthode d'identification inverse sur un MEF de moteur d'avion. Le modèle présenté figure 3.3 est composé de deux rotors basse et haute pression modélisés par des poutres de sections circulaires sur lesquelles sont disposées des masses représentant les aubages. Les carters sont modélisés par des éléments coques. Le modèle contient 11 459 éléments finis dont 544 éléments masses ponctuelles, 29 éléments poutres, 966 éléments ressorts et 9 920 éléments coques. Le modèle comporte 60 507 ddls actifs.

Nous étudions ici le comportement dynamique du modèle sans rotation des rotors. Une étude de sensibilité est réalisée au préalable avec la méthode de Morris présentée paragraphe 1.5.1. Pour cela, 80 paramètres sont considérés : 36 épaisseurs associées à des propriétés



**Fig. 3.3** – Modèle du moteur d'avion

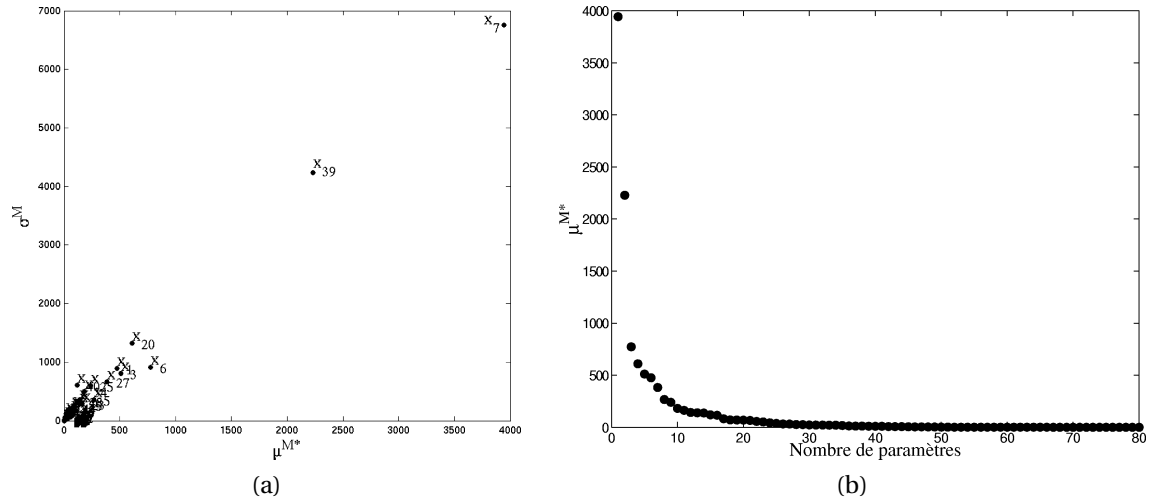
d'éléments coques, 1 paramètre de raideur, 1 paramètre d'amortissement, 27 sections associées à des propriétés d'éléments poutres et 15 masses ponctuelles. Le domaine de variation de chaque paramètre  $x_i$  est limité à  $[0,5 \times x_i^{(0)} ; 1,5 \times x_i^{(0)}]$ . Pour appliquer la méthode de Morris nous choisissons un nombre de niveau  $n_l = 4$  et  $r = 10$  trajectoires. 810 simulations ont donc été nécessaires. Les réponses d'intérêt sont les fréquences comprises dans la bande de fréquence  $[0 ; 200 \text{ Hz}]$ . Dans cette zone, le modèle nominal possède 22 modes élastiques. À noter qu'ici et comme dans toutes nos études de ce type, nous nous intéressons aux fréquences sans nous soucier de l'appariage des modes mais il est tout à fait envisageable de prendre en compte ce facteur. Une fois l'échantillonnage réalisé, nous calculons les indices  $\mu_k^{M^*}$  et  $\sigma_k^M$  pour l'ensemble des paramètres et des réponses. Des moyennes sont ensuite calculées sur l'ensemble des réponses. Les moyennes de  $\sigma_k^M$  en fonction des moyennes de  $\mu_k^{M^*}$  sont représentées figure 3.4a. Les paramètres  $x_7$  et  $x_{39}$  sont clairement identifiés comme influents. La position des points sur la diagonale indique que les effets des paramètres concernés sont non-linéaires et/ou sont en interaction. Les autres paramètres sont moins influents mais certains seront sélectionnés. La figure 3.4a représente  $\mu_k^{M^*}$  en fonction du nombre de paramètre, les paramètres ayant été reclassés afin que les valeurs de  $\mu_k^{M^*}$  soient décroissantes. En se basant sur ces résultats, nous décidons que neuf paramètres sont assez influents. Par ordre décroissant de  $\mu_k^{M^*}$ , ces paramètres sont  $x_7, x_{39}, x_6, x_{20}, x_3, x_1, x_{27}, x_5$  et  $x_{25}$ . La variable  $x_{39}$  régit l'aire d'éléments poutres, les autres paramètres régissent l'épaisseur d'éléments coques.

Les éléments finis concernés sont représentés sur la figure en coupe 3.5. Le vecteur des paramètres de modèle  $\mathbf{m}$  est composé donc de ces neuf paramètres.

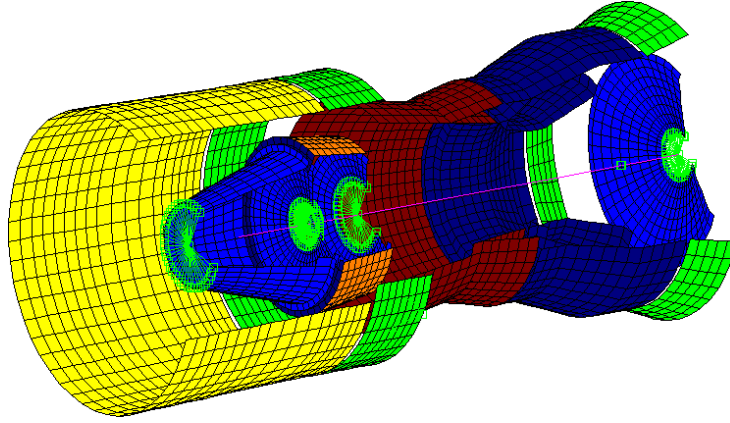
Le MEF composé des valeurs nominales  $\mathbf{m}^{(0)}$  de ces paramètres est utilisé pour simuler les données expérimentales. 22 fréquences propres non nulles étant présentes dans la bande  $[0 ; 200 \text{ Hz}]$ , les données observables sont  $\mathbf{d}^{\text{obs}} = \{d_1^{\text{obs}}, \dots, d_k^{\text{obs}}, d_{22}^{\text{obs}}\}$ , où  $d_k^{\text{obs}}$  représente la  $k^{\text{e}}$  fréquence mesurée. Un bruit gaussien simule les incertitudes sur les mesures.  $\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d})$  est une densité gaussienne avec une moyenne  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  et une matrice de covariance diagonale. Elle s'écrit

$$\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}) = \prod_{k=1}^{22} \rho_{d_k}(d_k) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{22} \left( \frac{d_k - d_k^{\text{obs}}}{\sigma_k^{\text{obs}}} \right)^2 \right), \quad (3.26)$$

où  $\sigma_k^{\text{obs}} = 0,02 \times d_k^{\text{obs}}$  est l'écart type du bruit.



**Fig. 3.4** – (a) Moyennes sur les indices de Morris ; (b) évolution de  $\mu_k^{M*}$  après classement des paramètres



**Fig. 3.5** – Éléments finis associés aux paramètres d'intérêt

Nous choisissons *a priori* une densité uniforme  $\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$  de la forme

$$\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) = \prod_{k=1}^9 \rho_{m_k}(m_k), \quad (3.27)$$

avec

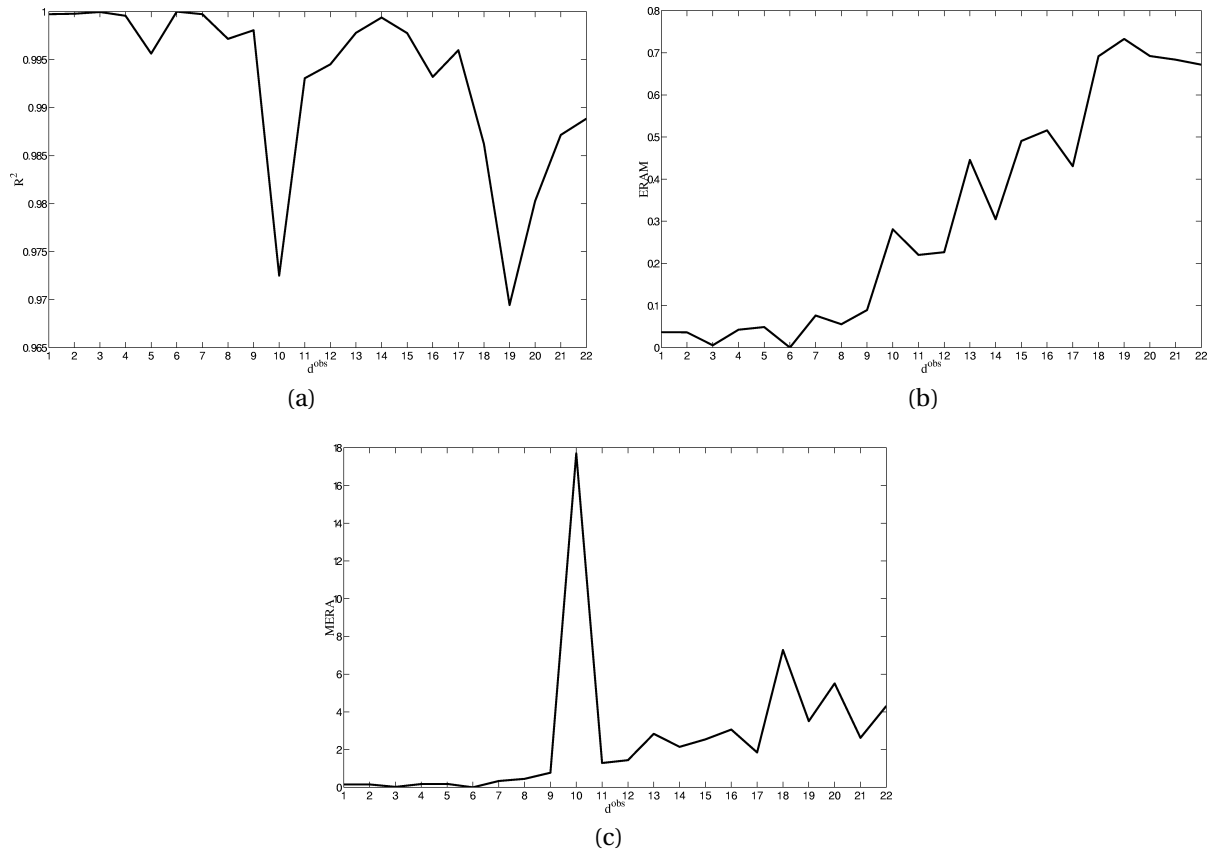
$$\rho_{m_k}(m_k) = \begin{cases} \frac{1}{B_k^{\sup} - B_k^{\inf}} & \text{pour } B_k^{\inf} \leq m_k \leq B_k^{\sup} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \quad (3.28)$$

où  $B_k^{\inf} = 0,5 \times m_k^{(0)}$  et  $B_k^{\sup} = 1,5 \times m_k^{(0)}$ .

En appliquant la démarche exposée précédemment, notre objectif est de déterminer les densités de probabilité *a posteriori* des différents paramètres en utilisant les données « expérimentales » simulées.

Étant donné le nombre de paramètres, il est évident que l'algorithme d'échantillonnage doit comporter un grand nombre d'itérations. Les calculs utilisant le MEF complet ne sont donc pas envisageables. Nous avons choisi les réseaux de neurones pour cette application. Un échantillonnage de type hypercube latin uniforme a été réalisé afin d'obtenir 800 échantillons de  $\mathbf{m}$  dans son espace de variation. L'analyse modale du MEF est effectuée pour cha-

que échantillon afin d'obtenir la base d'apprentissage des réseaux de neurones. Une base de test de 200 échantillons a aussi été construite. Avec l'aide de cette dernière, nous évaluons la capacité de généralisation des réseaux construits. Les critères  $R^2$ , ERAM et MERA sont calculés pour les 22 observations et reportés sur les figures 3.6a à 3.6c. Les résultats sont globalement bons, les valeurs de  $R^2$  sont toutes supérieures à 0,97 et celles de ERAM, l'erreur relative absolue moyenne, sont inférieures à 0,73 %. On notera toutefois une dégradation en fonction du rang de la fréquence. Le maximum de l'erreur relative absolue est lui un critère plus sévère. Nous constatons sur la figure 3.6c, que la valeur de MERA peut être assez importante. Pour  $d_{10}^{obs}$ , celle-ci atteint 17,7 %. Les bonnes valeurs de  $R^2$  et de ERAM nous incitent cependant à faire confiance aux métamodèles utilisés.

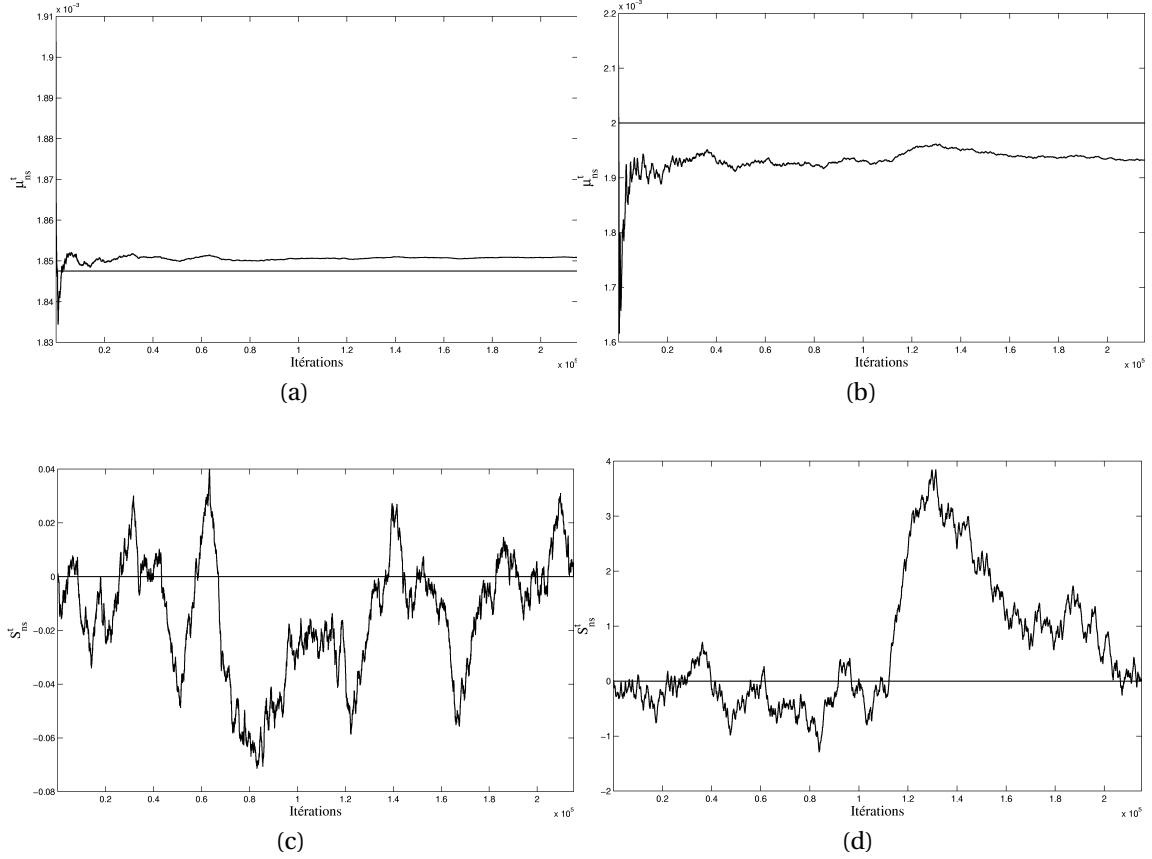


**Fig. 3.6** – Critères :  $R^2$  (a), ERAM (b), MERA (c)

Avec un point de départ aléatoire, l'algorithme présenté paragraphe 3.2.2 est exécuté durant 800 000 itérations. La convergence est évaluée par les méthodes évoquées paragraphe 3.2.3.

Les figures 3.7a et 3.7b représentent respectivement les évolutions de  $\hat{\mu}_{n_s}^t$  pour  $x_7$  et  $x_{25}$ . Sur ces figures, la ligne droite signale les valeurs associées au modèle nominal. Les figures 3.7c et 3.7d sont les graphes Cusum. Alors que visuellement la convergence semble atteinte pour  $x_7$ , c'est beaucoup moins évident pour  $x_{25}$ . La moyenne n'évolue pas vraiment vers une valeur fixe. Le graphe Cusum semble quant à lui suffisamment irrégulier. Doit-on faire évoluer l'algorithme un peu plus loin ? Nous ne le pensons pas. En effet, l'observation de l'évolution de  $\hat{\mu}_{n_s}^t$  ne prend réellement son sens que lorsque la distribution de la variable observée est paramétrée avec la valeur moyenne, comme c'est le cas pour une distribution

gaussienne. Si ce n'est pas le cas, le nombre d'itérations sera énorme avant d'observer une réelle convergence. Nous choisissons donc de stopper l'échantillonnage lorsque des évolutions telles que celles des figures 3.7a et 3.7c sont observées pour quelques paramètres. Au regard des évolutions associées à tous les paramètres, nous jugeons que l'échantillonnage est suffisant pour cette simulation.



**Fig. 3.7** – Évolutions de  $\hat{\mu}_{n_s}^t$  pour (a)  $x_1$  et (b)  $x_{25}$  ; évolutions de  $\hat{S}_{n_s}^t$  pour (c)  $x_1$  et (d)  $x_{25}$

Sous une plate-forme Linux, un PC Pentium IV cadencé à 3,4 GHz, avec 1 Gb de RAM, les 800 000 itérations nécessitent 32 heures de calcul. Nous obtenons 215 154 modèles *a posteriori*. Seuls les derniers modèles sont considérés. 800 échantillons quasi-i.i.d sont sélectionnés pour estimer les densités *a posteriori*.

Les densités de probabilité associées sont représentées figure 3.8. Sur ces figures, les distributions uniformes *a priori* apparaissent en pointillés. Les trait verticaux indiquent les valeurs nominales des paramètres de  $\mathbf{m}^{(0)}$ , valeurs à partir desquelles les observations de  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  ont été simulées.

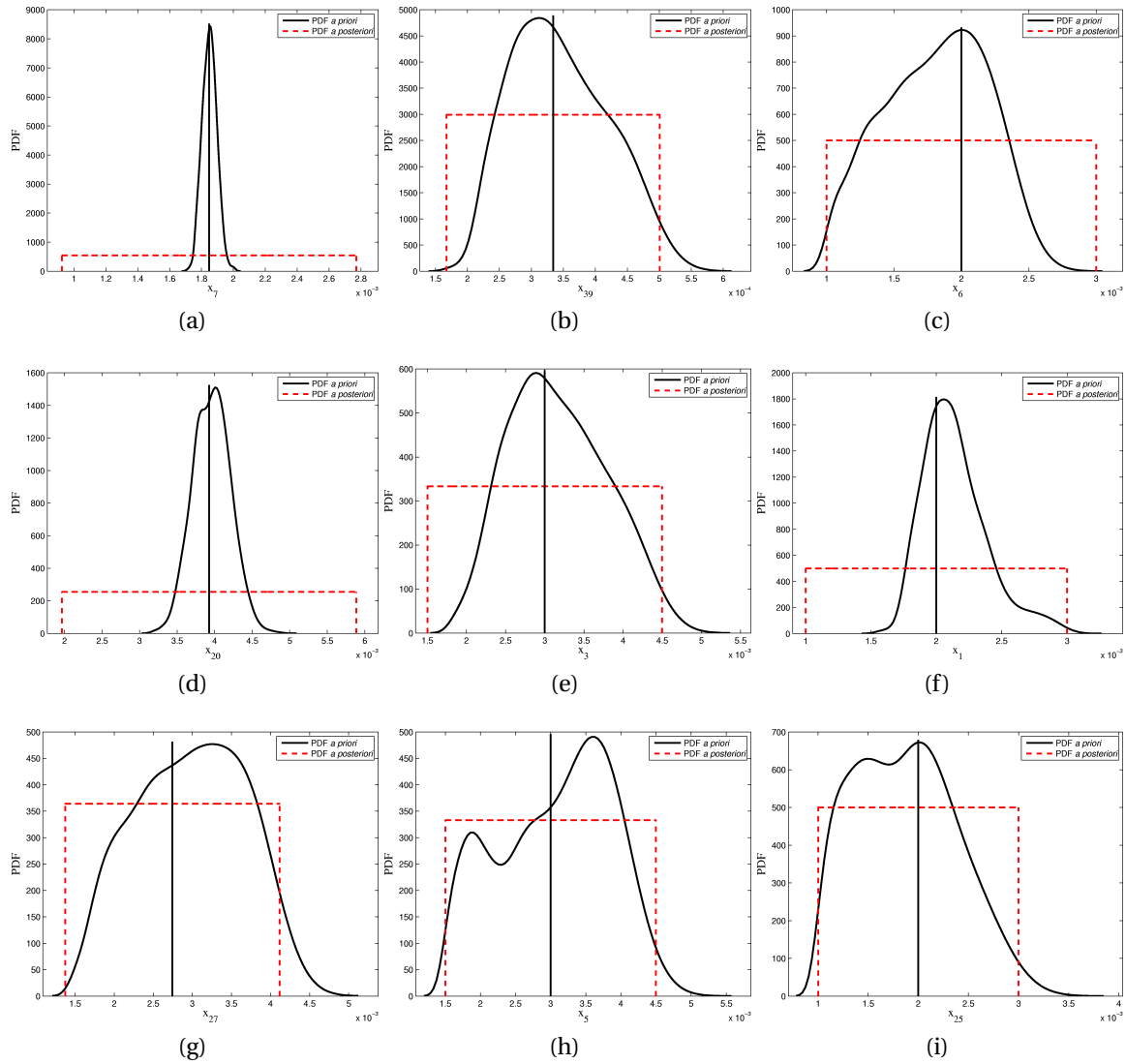
Nous constatons que l'information sur les paramètres a fortement évolué pour l'ensemble des paramètres. L'évolution n'est cependant pas la même suivant le paramètre considéré. On remarquera que les fortes évolutions ne concernent pas forcément les paramètres pointés comme les plus influents lors de l'analyse de Morris. Nous indiquerons dans la section suivante comment quantifier ce gain d'information. Lorsque les densités semblent « coller » aux densités classiques telle que par exemple la gaussienne, il est facile d'estimer les paramètres associés à ces lois. Pour des formes moins classiques, les échantillons serviront à caractériser leurs lois. Nous parlerons alors de distribution empirique.

Nous avons supposé *a priori* que les paramètres n'étaient pas corrélés. Qu'en est-il *a*

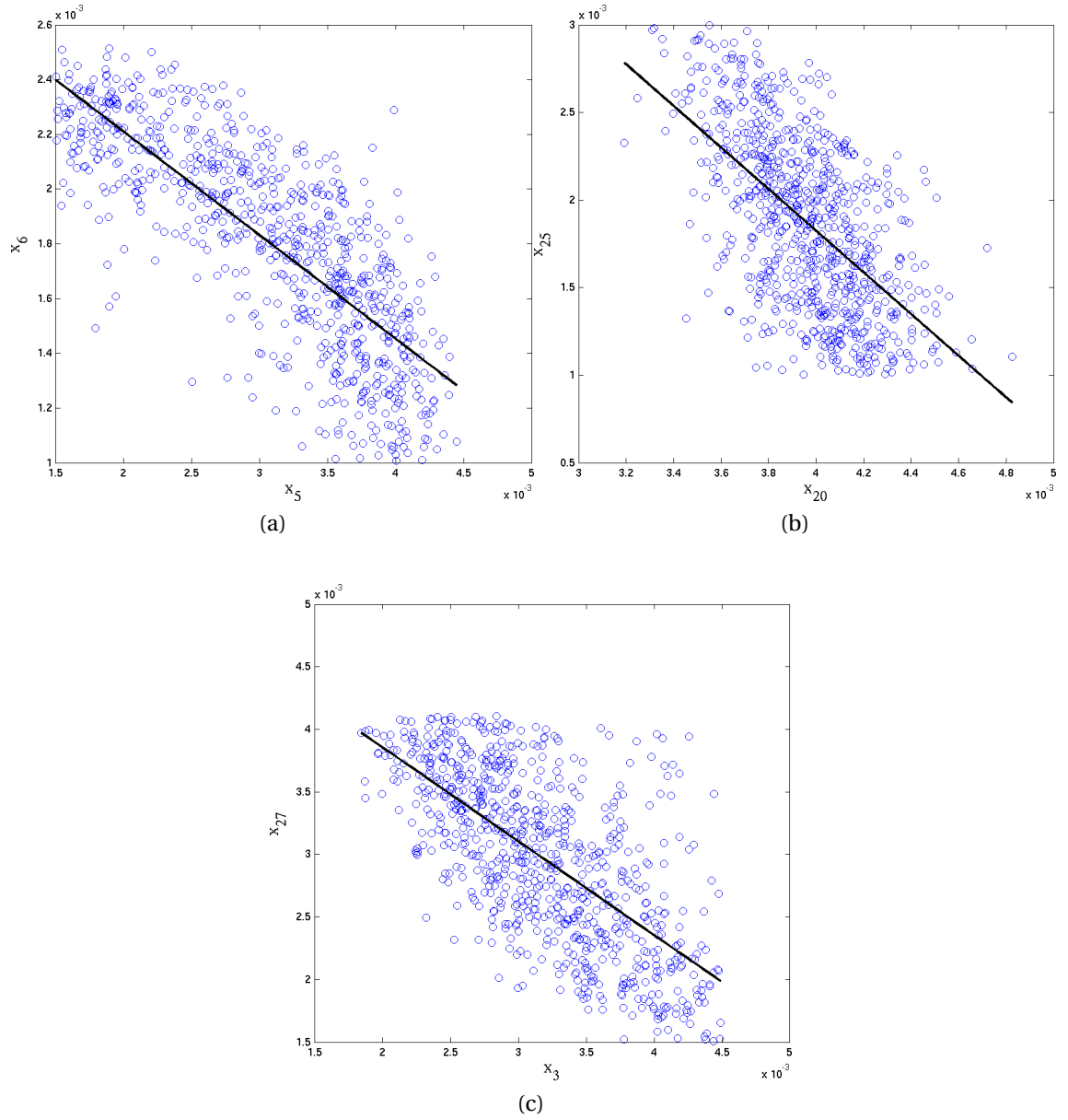
*posteriori*? Les diagrammes de dispersion permettent de détecter simplement d'éventuelles corrélations entre les paramètres. Après observation de tous les couples possibles, il est apparu qu'*a posteriori* il existe désormais des corrélations entre  $x_5$  et  $x_6$ , entre  $x_{20}$  et  $x_{25}$  et entre  $x_3$  et  $x_{27}$ . Les nuages de points ainsi que les droites de régression linéaire sont représentés figures 3.9a, 3.9b et 3.9c. Les échantillons sont les mêmes que ceux utilisés pour tracer les densités de probabilité. Il semble au vu de ces figures que les corrélations ne soient pas linéaires. À titre indicatif, les coefficients de corrélation linéaire associés à ces diagrammes de dispersion sont respectivement 0,79, 0,59 et 0,68.

De la même façon que nous avons déterminé les distributions *a posteriori* pour les paramètres, nous pouvons obtenir les distributions *a posteriori* pour les données observables. Pour observer le comportement de la réponse lorsque les paramètres de modèle varient selon les lois de probabilité identifiées, il n'est pas nécessaire de refaire des simulations. Les figures 3.10a à 3.10d montrent en traits continus les densités *a posteriori* obtenues pour les observations  $d_1$  et  $d_{22}$ . En pointillés, apparaissent les densités  $\rho_{d_k}(d_k)$ . *A posteriori*, les densités sur les données ne sont évidemment pas les mêmes que les densités expérimentales. Cependant, il est clair que les modèles de paramètres identifiés permettent d'obtenir des réponses en accord avec nos mesures pseudo-expérimentales.

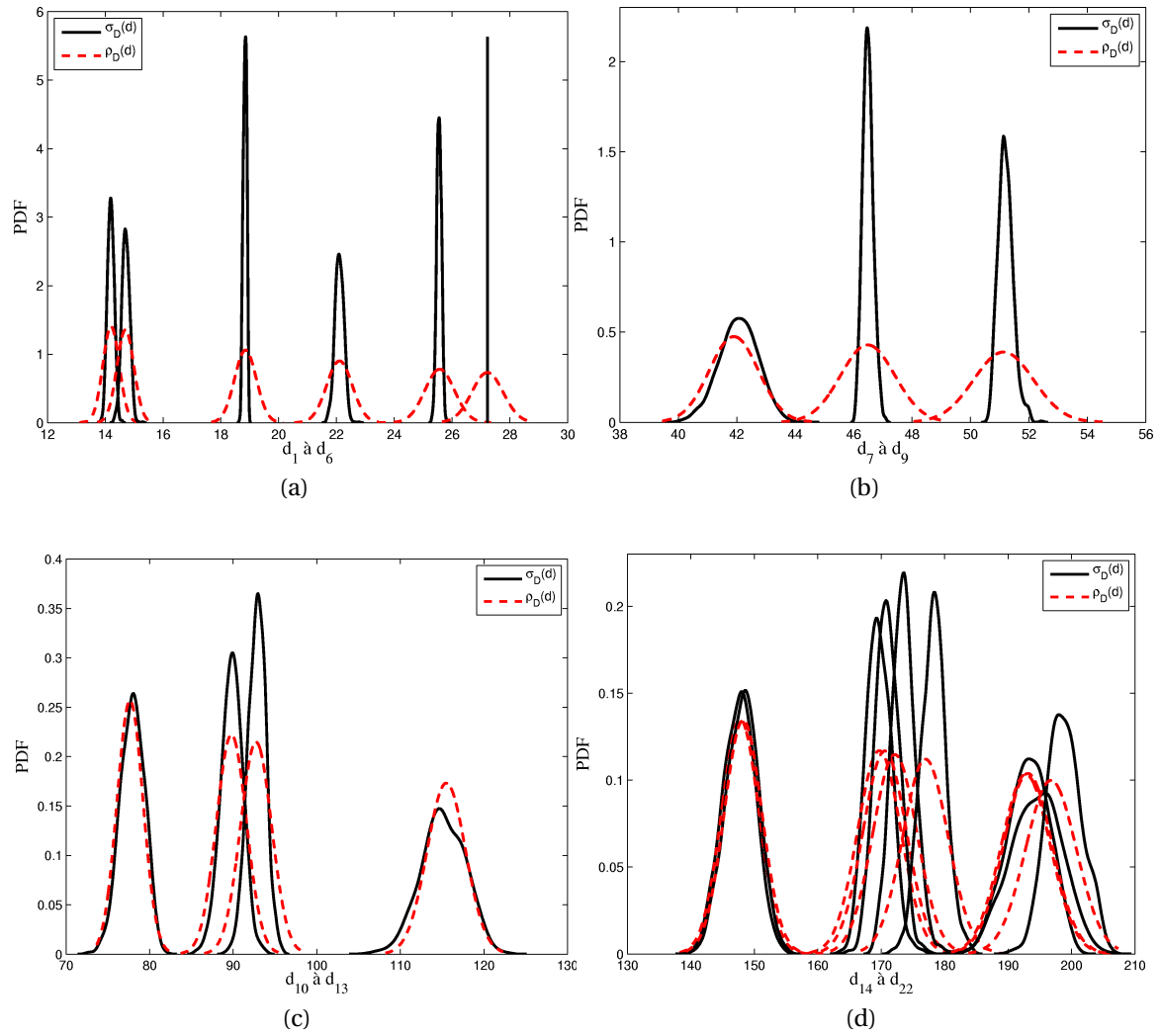




**Fig. 3.8** – Résultats de l'identification pour les paramètres (a)  $x_7$ , (b)  $x_{39}$ , (c)  $x_6$ , (d)  $x_{20}$ , (e)  $x_3$ , (f)  $x_1$ , (g)  $x_{27}$ , (h)  $x_5$ , (i)  $x_{25}$



**Fig. 3.9** – Diagramme de dispersion *a posteriori* entre (a)  $x_5$  et  $x_6$ , entre (b)  $x_{20}$  et  $x_{25}$ , entre (c)  $x_3$  à  $x_{27}$



**Fig. 3.10** – Densité de probabilité *a posteriori* sur les observations pour (a)  $d_1$  à  $d_6$ , (b)  $d_7$  à  $d_9$ , (c)  $d_{10}$  à  $d_{13}$  et (d)  $d_{14}$  à  $d_{22}$

### 3.3 Planification d'essais pour le gain d'informations

#### 3.3.1 Plan d'expérience bayésien

D'une manière générale, étant donné un protocole expérimental  $\eta$  choisi dans l'espace de paramètres d'expériences  $\mathcal{H}$  et étant donnée une fonction d'utilité  $U(\mathbf{d}, \eta)$  représentant le but de l'expérience avec le protocole  $\eta$ , l'objectif d'un plan d'expérience bayésien est de maximiser le critère

$$EU(\eta) = \int_{\mathcal{D}} P(\mathbf{d}|\eta) U(\mathbf{d}, \eta) d\mathbf{d}, \quad (3.29)$$

appelé utilité espérée.

La solution bayésienne de la planification est donnée par le protocole  $\eta^*$  maximisant l'équation (3.29), c'est-à-dire

$$EU(\eta^*) = \max_{\eta \in \mathcal{H}} \int_{\mathcal{D}} P(\mathbf{d}|\eta) U(\mathbf{d}, \eta) d\mathbf{d}. \quad (3.30)$$

Ici, nous avons une marginalisation sur toutes les futures données appropriées représentées par une densité de probabilité  $P(\mathbf{d}|\eta)$ .  $P(\mathbf{d}|\eta)$  est la vraisemblance que la mesure  $\mathbf{d}$  sera obtenue avec l'expérience. En fait, nous choisissons dans ce travail de simplifier le problème à la maximisation de  $U(\mathbf{d}, \eta)$ . Ainsi, le but de notre BED est de trouver  $U(\mathbf{d}, \eta^*)$ . Nous verrons plus loin ce qu'un protocole  $\eta$  peut être. Nous avons déjà vu paragraphe 3.2.1 que dans la formulation probabiliste classique des problèmes inverses, une information *a priori* sur les paramètres du modèle représentés par une densité  $P(\mathbf{m})$  est combinée via le théorème de Bayes avec une densité  $P(\mathbf{d}|\mathbf{m})$ .

Pour introduire les fonctions d'utilité, nous rappelons que Shannon [185] a montré que la valeur de l'information peut être associée à une source représentée par une variable aléatoire discrète  $X$  en calculant l'entropie correspondante. Soient  $\{x_1, \dots, x_N\}$  les événements de  $X$  avec la distribution de probabilité correspondante  $\{p_1, \dots, p_N\}$ , l'entropie associée avec cette distribution discrète est

$$H(X) = - \sum_{i=1}^N p_i \log p_i. \quad (3.31)$$

Comme  $H(X)$  augmente avec les incertitudes sur  $X$ , l'entropie quantifie l'information associée avec l'ensemble des mesures. Si un second événement  $\{y_1, \dots, y_N\}$  de  $X$  a une entropie inférieure à  $\{x_1, \dots, x_N\}$ ,  $\{y_1, \dots, y_N\}$ , alors  $\{y_1, \dots, y_N\}$  a un plus petit niveau d'incertitude et ainsi contient plus d'information sur  $X$ . De la même manière, pour une variable aléatoire continue  $X$  de densité de probabilité  $p_X(x)$ , nous pouvons écrire l'entropie différentielle

$$H_d(X) = - \int_{\mathcal{X}} p_X(x) \log p_X(x) dx. \quad (3.32)$$

Étant donnée la densité *a posteriori*  $P(\mathbf{m}|\mathbf{d}, \eta)$ , les fonctions d'utilité quantifiant le gain d'information résultant d'une expérience peuvent être

$$\begin{aligned} U_{IG}(\mathbf{d}, \eta) &= H_d(\mathbf{m}, \eta) - H_d(\mathbf{m}|\mathbf{d}, \eta) \\ &= - \int_{\mathcal{M}} P(\mathbf{m}, \eta) \log(P(\mathbf{m}, \eta)) - P(\mathbf{m}|\mathbf{d}, \eta) \log(P(\mathbf{m}|\mathbf{d}, \eta)) d\mathbf{m} \quad \text{et} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$U_{KL}(\mathbf{d}, \eta) = \int_{\mathcal{M}} P(\mathbf{m}|\mathbf{d}, \eta) \log \left( \frac{P(\mathbf{m}|\mathbf{d}, \eta)}{P(\mathbf{m})} \right) d\mathbf{m}. \quad (3.34)$$

$U_{IG}(\mathbf{d}, \eta)$  est l'information mutuelle entre  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{d}$ . C'est le gain d'information en  $\mathbf{d}$ . La seconde fonction d'utilité  $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$  est la distance de Kullback-Leibler [104] (KLD) entre la densité *a posteriori* et la densité *a priori* de  $\mathbf{m}$ . Ces mesures ne sont pas réellement de vraies distances, mais donnent toujours une mesure du gain de l'information positive. En fait, elles sont équivalentes et seule  $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$  sera considérée par la suite. Si on utilise le logarithme en base 2, ces fonctions sont mesurées en bits.

En se basant sur la théorie générale des problèmes inverses présentée paragraphe 3.2.1, nous proposons pour mesurer l'information portée par une expérience d'utiliser les fonctions d'utilité

$$U_{KL}(\mathbf{d}, \eta) = \int_{\mathcal{M}_k} \sigma_{m_k}(m_k, \eta) \log \left( \frac{\sigma_{m_k}(m_k, \eta)}{\rho_{m_k}(m_k, \eta)} \right) dm_k \quad \text{et} \quad (3.35)$$

$$U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta) = \int_{\mathcal{M}_k^{loc}} \sigma_{m_k}(m_k, \eta) dm_k. \quad (3.36)$$

Ainsi, pour chaque expérience caractérisée par un protocole  $\eta$  et les données observées  $\mathbf{d}$  associées, ces fonctions d'utilité sont calculées pour chaque paramètre du modèle  $m_k$  en utilisant la densité *a posteriori*  $\sigma_{m_k}(m_k, \eta)$  résultant de la théorie générale des problèmes inverses.  $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$  est la KLD entre la densité *a posteriori*  $\sigma_{m_k}(m_k, \eta)$  et la densité *a priori*  $\rho_{m_k}(m_k, \eta)$  sur tout l'intervalle de variation de  $m_k$ .

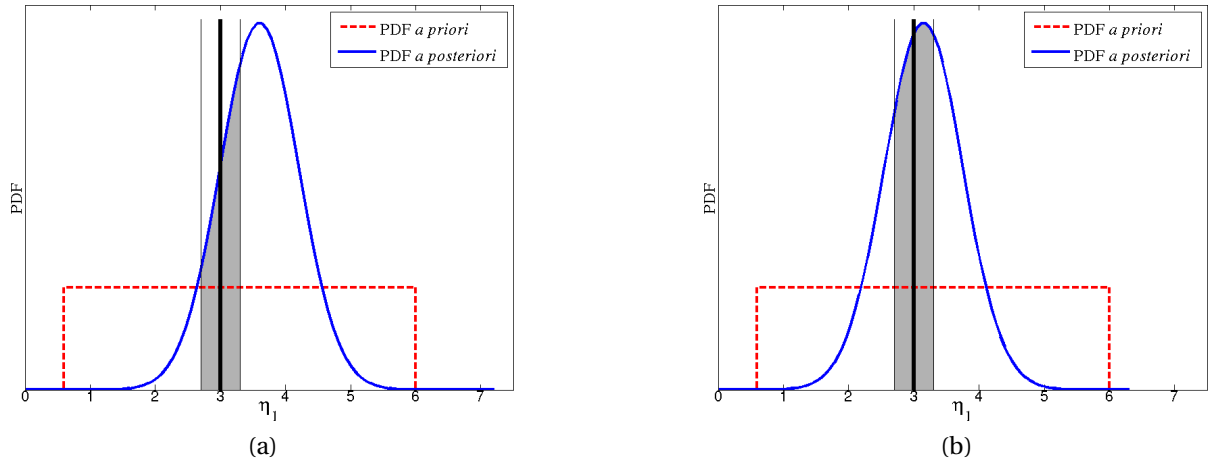
$U_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$  est complétée avec  $U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta)$ , la probabilité que  $m_k$  soit contenue dans une région  $\mathcal{M}_k^{loc} \subseteq \mathcal{M}_k$ . Cette fonction est utile pour juger de la qualité de l'identification et éventuellement choisir entre des protocoles expérimentaux avec la même valeur de  $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$ . Les figures de 3.11 illustrent un cas avec deux protocoles  $\eta_1$  et  $\eta_2$ . Sur ces figures, la ligne en trait interrompu est la densité de probabilité *a priori* de  $m_k$ , la ligne en trait continu est la densité de probabilité *a posteriori*. Le trait central indique la valeur nominale de  $m_k$  que l'on considère comme la vraie valeur. Les deux traits fins délimitent  $\mathcal{M}_k^{loc}$ . Pour les deux protocoles  $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta_{1,2}) = 0,78$  mais  $U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta_1) = 0,24$  et  $U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta_2) = 0,37$ . Par conséquent,  $\eta_2$  sera préféré à  $\eta_1$  puisque pour un même gain d'information,  $\eta_2$  conduit à identifier des valeurs de  $m_k$  dont la probabilité d'être la vraie valeur est plus grande que celle identifiée avec  $\eta_1$ .

Les deux fonctions d'utilité proposées sont associées à un paramètre  $m_k$ . Pour quantifier l'information de l'ensemble des paramètres  $\mathbf{m}$  nous proposons d'utiliser

$$U_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta) = \int_{\mathcal{M}} \sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta) \log \left( \frac{\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta)}{\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta)} \right) d\mathbf{m}. \quad (3.37)$$

$U_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta)$  est la KLD entre la densité de probabilité conjointe  $\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta)$  et la densité de probabilité conjointe *a priori*  $\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta)$ .

Dans nos applications, les protocoles expérimentaux  $\eta$  sont les types de mesures, de configurations ou les conditions limites appliquées au MEF. Par exemple, la plage des fréquences de l'analyse modale peut être considérée comme un protocole, une analyse modale d'une poutre libre-libre peut être une expérience avec un protocole  $\eta_1 = \text{« libre-libre »}$  et une



**Fig. 3.11** – (a)  $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta_1) = 0,78$  et  $U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta_1) = 0,24$ , (b)  $U_{KL}(\mathbf{d}, \eta_2) = 0,78$  et  $U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta_2) = 0,37$

analyse de la poutre encastree-libre peut être une seconde expérience avec un protocole  $\eta_2 =$  « encastree-libre ».

Une stratégie pour construire un plan d'expériences bayésien pour des essais dynamiques peut être la suivante. Après la modélisation d'un MEF de référence du système d'intérêt, nous définissons un ensemble de protocoles  $\eta = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_\eta}\} \in \mathcal{H}$ . Pour chaque protocole  $\eta_k$  un MEF ou un type d'analyse sont associés. Une expérience consiste en une analyse modale du MEF de référence. Les données observées de l'expérience sont les fréquences propres, les vecteurs propres, les FRFs, *etc.* Ensuite, du bruit est ajouté à ces données pour simuler les incertitudes expérimentales et nous évaluons les fonctions d'utilité (3.35) et (3.36). Finalement, avec l'observation des résultats nous pouvons déterminer les protocoles  $\eta^*$  maximisant le gain d'information. Il faut noter que suite aux hypothèses faites lors de la modélisation des incertitudes expérimentales ou à une mauvaise connaissance *a priori*, une expérience qui semblait judicieuse en théorie peut être en fait inutile. Par conséquent, les résultats doivent être pris avec précaution.

Puisque l'évaluation des fonctions d'utilité peut être très coûteuse pour de grands modèles, la section suivante traite des difficultés liées aux calculs numériques.

### 3.3.2 Traitement numérique

Les équations (3.35) et (3.36) peuvent être exprimées sous la forme générale

$$U = \int_{\mathbb{X}} f(x) h(x) dx = E(h(x)) \quad (3.38)$$

Supposons que  $h(x)$  et  $f(x)$  soient telles que  $f(x) h(x)$  est intégrable sur l'espace  $\mathbb{X}$ , et que  $f(x)$  est une fonction de densité satisfaisant  $\int_{\mathbb{X}} f(x) dx = 1$ .

L'équation (3.38) peut être évaluée en utilisant des échantillons aléatoires  $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n_s)}\}$  de  $x$  générés à partir de la densité  $f(x)$ . En effet, d'après la loi des grands nombres, la moyen-

ne empirique

$$\hat{U} = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} h(x^{(k)}) \quad (3.39)$$

converge presque sûrement vers  $E(h(x)) = U$ .

Ainsi, pour chaque protocole  $\eta_k$ , nous pouvons évaluer les équations (3.35), (3.36) et (3.37) en générant des échantillons de  $f(x) = \sigma_{m_k}(m_k, \eta)$  par la méthode présentée au paragraphe 3.2.2. Puisque  $\sigma_{m_k}(m_k, \eta)$  est une densité normalisée sur  $\mathcal{M}_k$ , c'est-à-dire

$$\int_{\mathcal{M}_k} \sigma_{m_k}(m_k, \eta) dm_k = 1,$$

les équations (3.35) et (3.36) peuvent être approximées par

$$\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \log \left( \frac{\sigma_{m_k}(m_k^{(i)}, \eta)}{\rho_{m_k}(m_k^{(i)}, \eta)} \right) \approx U_{KL}(\mathbf{d}, \eta) \quad \text{et} \quad (3.40)$$

$$\hat{U}_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta) = \frac{\text{nombre de } m_k^{(i)} \in \mathcal{M}_k^{\text{loc}}}{n} \approx U_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta). \quad (3.41)$$

Nous rappelons que pour une séquence  $\{m_k^{(1)}, \dots, m_k^{(n_s)}\}$ , la densité  $\sigma_{m_k}(m_k^{(i)})$  est estimée avec une fonction MATLAB<sup>®</sup>.

Pour obtenir une approximation  $\hat{U}_{KL}^{\text{joint}}(\mathbf{d}, \eta)$  de  $U_{KL}^{\text{joint}}(\mathbf{d}, \eta)$ , nous procédons comme suit. Tout d'abord, réécrivons équation (3.8) sous la forme

$$\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta) = \frac{\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta) L(\mathbf{m}, \eta)}{\int_{\mathcal{M}} \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta) L(\mathbf{m}, \eta) d\mathbf{m}}. \quad (3.42)$$

En introduisant l'équation (3.42) dans l'équation (3.37), nous obtenons

$$U_{KL}^{\text{joint}}(\mathbf{d}, \eta) = \int_{\mathcal{M}} \sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta) \log \left( \frac{L(\mathbf{m}, \eta)}{I_c} \right) d\mathbf{m}, \quad (3.43)$$

avec  $I_c = \int_{\mathcal{M}} \rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta) L(\mathbf{m}, \eta) d\mathbf{m}$ .

La première étape est d'évaluer la constante d'intégration  $I_c$ . Comme nous utilisons des densités de probabilité standards pour  $\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$ , il est facile de générer un grand nombre  $N$  d'échantillons  $\mathbf{m}^{(i)}$  de  $\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$ . Ainsi

$$\hat{I}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N L(\mathbf{m}^{(i)}, \eta) \approx I_c. \quad (3.44)$$

Finalement, les échantillons  $\{\mathbf{m}^{(1)}, \mathbf{m}^{(2)}, \dots, \mathbf{m}^{(n_s)}\}$  de  $\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta)$  obtenus avec la simulation de Monte Carlo sont utilisés pour calculer

$$\hat{U}_{KL}^{\text{joint}}(\mathbf{d}, \eta) = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \log \left( \frac{L(\mathbf{m}^{(i)}, \eta)}{I_c} \right) \approx U_{KL}^{\text{joint}}(\mathbf{d}, \eta). \quad (3.45)$$

La plus grande tâche est l'échantillonnage de  $\sigma_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}, \eta)$  qui nous fournit des échantillons de chaque paramètre du modèle  $m_k$ . En général, comme décrit paragraphe 3.2.4, nous utilisons les métamodèles pour réaliser cet échantillonnage.

### 3.3.3 Applications

#### Exemple académique

Les considérations précédentes sont illustrées sur un exemple académique composé de trois poutres encastrées-libres connectées avec deux ressorts  $S_1$  et  $S_2$  comme représenté figure 3.12. La première poutre est discrétisée avec douze éléments poutres, la seconde avec huit éléments poutres et la troisième avec dix. Avec deux ddls par noeud et trois noeuds encastrés, le nombre total de ddls est de 60. Le but de la simulation est de trouver les essais dynamiques maximisant le gain d'information sur les trois sections d'aires,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ . Ces paramètres n'ont pas été choisis à partir d'une étude de sensibilité, mais de part leur localisation. L'ensemble des paramètres du modèle est donc  $\mathbf{m} = \{A_1, A_2, A_3\}$ .

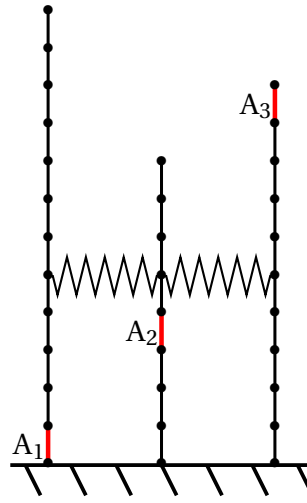


Fig. 3.12 – Système étudié

Pour construire le plan d'expérience bayésien nous utilisons un plan factoriel à deux niveaux. Dans la méthodologie classique des plans d'expérience, les facteurs sont les variables d'intérêt expérimentales. Un niveau est le degré ou l'intensité d'un facteur. Ici, les facteurs seront les différentes parties de la structure, à savoir les trois poutres, et les niveaux seront les conditions limites des extrémités des poutres. Le niveau est mis à 0 si l'extrémité est libre ou mis à 1 si l'extrémité est encastrée. Comme nous avons seulement 2 niveaux et 3 facteurs, un plan factoriel complet de  $2^3 = 8$  expériences peut être construit. Une expérience correspond à une configuration particulière du système. Les huit configurations sont représentées figure 3.13. Le protocole  $\eta_j$ , avec  $j = 1, \dots, 8$ , est l'analyse modale du MEF de la  $j^e$  configuration.

Pour des valeurs de référence des paramètres de modèle  $\mathbf{m}^{(0)} = \{A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, A_3^{(0)}\}$ , les six premières fréquences propres sont les données observées  $\mathbf{d}^{\text{obs}} = \{d_1^{\text{obs}}, \dots, d_6^{\text{obs}}\}$ . Un bruit gaussien simule les incertitudes sur les mesures.  $\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \eta_j)$  est une densité gaussienne avec moyenne  $\mathbf{d}^{\text{obs}}$  et une matrice de covariance diagonale. Elle s'écrit

$$\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \eta_j) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 \left( \frac{d_k - d_k^{\text{obs}}}{\sigma_k^{\text{obs}}} \right)^2 \right), \quad (3.46)$$

où  $\sigma_k^{\text{obs}} = 0,02 \times d_k^{\text{obs}}$  est l'écart type du bruit.



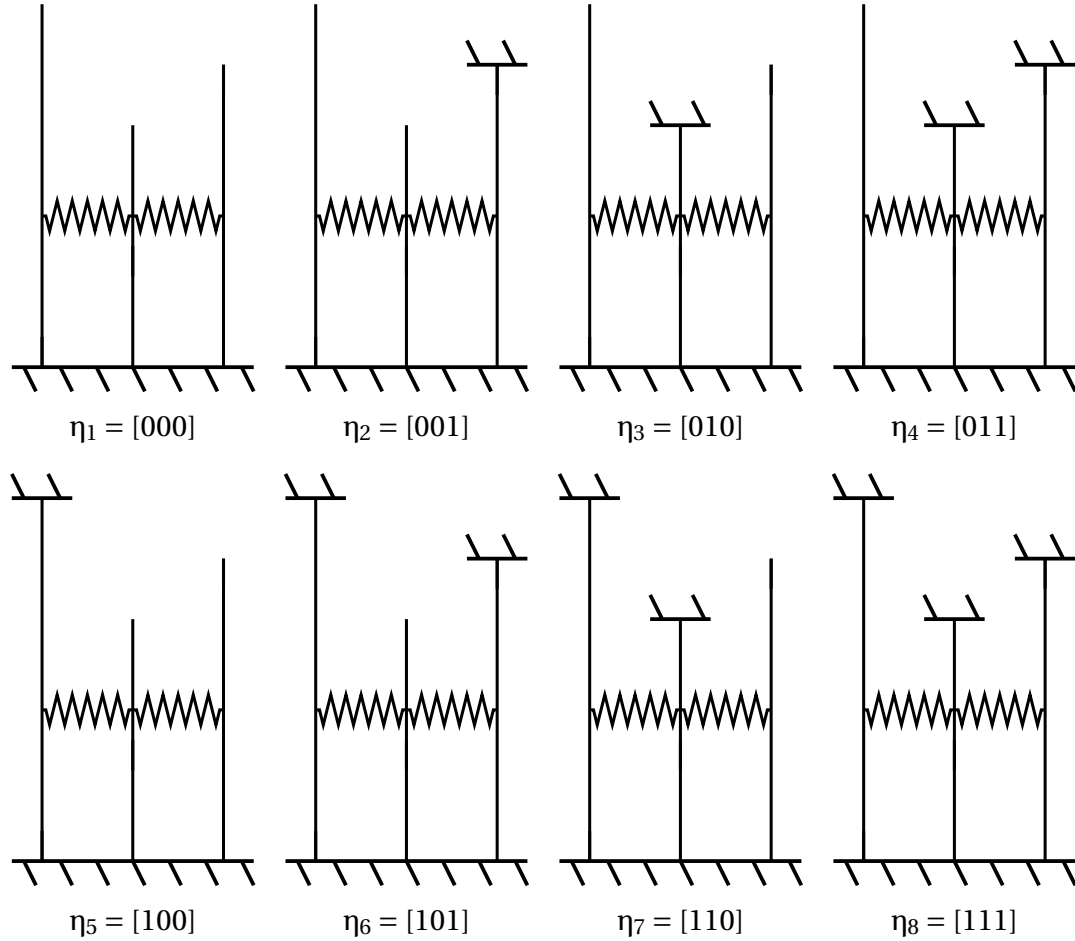


Fig. 3.13 – Les huit configurations du système

La densité *a priori*  $\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m})$  uniforme est

$$\rho_{\mathcal{M}}(\mathbf{m}) = \prod_{k=1}^3 \rho_{m_k}(m_k), \quad (3.47)$$

avec

$$\rho_{m_k}(m_k) = \begin{cases} \frac{1}{B_k^{\sup} - B_k^{\inf}} & \text{pour } B_k^{\inf} \leq m_k \leq B_k^{\sup} \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}, \quad (3.48)$$

où  $B_k^{\inf} = 0, 1 \times A_k^{(0)}$  et  $B_k^{\sup} = 3 \times A_k^{(0)}$ . Puisque la construction des matrices et l'analyse modale demandent peu de temps, les fonctions d'utilité sont calculées aussi bien avec le modèle exact qu'avec des métamodèles construits avec les surfaces de réponse, les réseaux de neurones ou le krigeage. Les polynômes sont d'ordre trois, les modèles de krigeage ont une fonction de corrélation gaussienne et les réseaux de neurones possèdent deux couches cachées de trois neurones. Les critères  $R^2$ , les erreurs ERAM et MERA sur la prédiction des six fréquences propres de la première expérience sont reportées dans le tableau 3.1. Ces critères sont calculés sur une base de test de 500 couples entrées-sorties. Les réseaux de neurones et le krigeage donnent les meilleurs résultats. Même si globalement les résultats sont satisfaisants, on note que pour les trois derniers modes l'erreur MERA est importante. Ceci signifie que localement le métamodèle peut être beaucoup moins prédictif. Les niveaux de précision pour les autres configurations sont sensiblement les mêmes.

**Tab. 3.1** – Erreurs d'estimation pour la configuration  $\eta_1$ 

$R^2$						
Mode	1	2	3	4	5	6
Polynôme	0,99	0,99	0,99	0,98	0,84	0,63
Réseau	0,99	0,99	0,99	0,99	0,93	0,99
Krigeage	0,99	0,99	0,99	0,99	0,92	0,90
ERAM						
Mode	1	2	3	4	5	6
Polynôme	0,63	0,11	0,34	1,10	1,38	1,26
Réseau	$5,68 \times 10^{-2}$	$2,34 \times 10^{-2}$	$5,68 \times 10^{-2}$	0,37	0,48	$7,68 \times 10^{-2}$
Krigeage	$1,59 \times 10^{-2}$	$1,10 \times 10^{-3}$	$1,60 \times 10^{-3}$	0,32	0,44	0,37
MERA						
Mode	1	2	3	4	5	6
Polynôme	5,62	0,97	2,32	5,13	11,58	27,53
Réseau	0,61	$9,57 \times 10^{-2}$	0,14	0,32	0,44	3,61
Krigeage	0,86	$3,92 \times 10^{-2}$	$3,54 \times 10^{-2}$	6,86	15,92	17,10

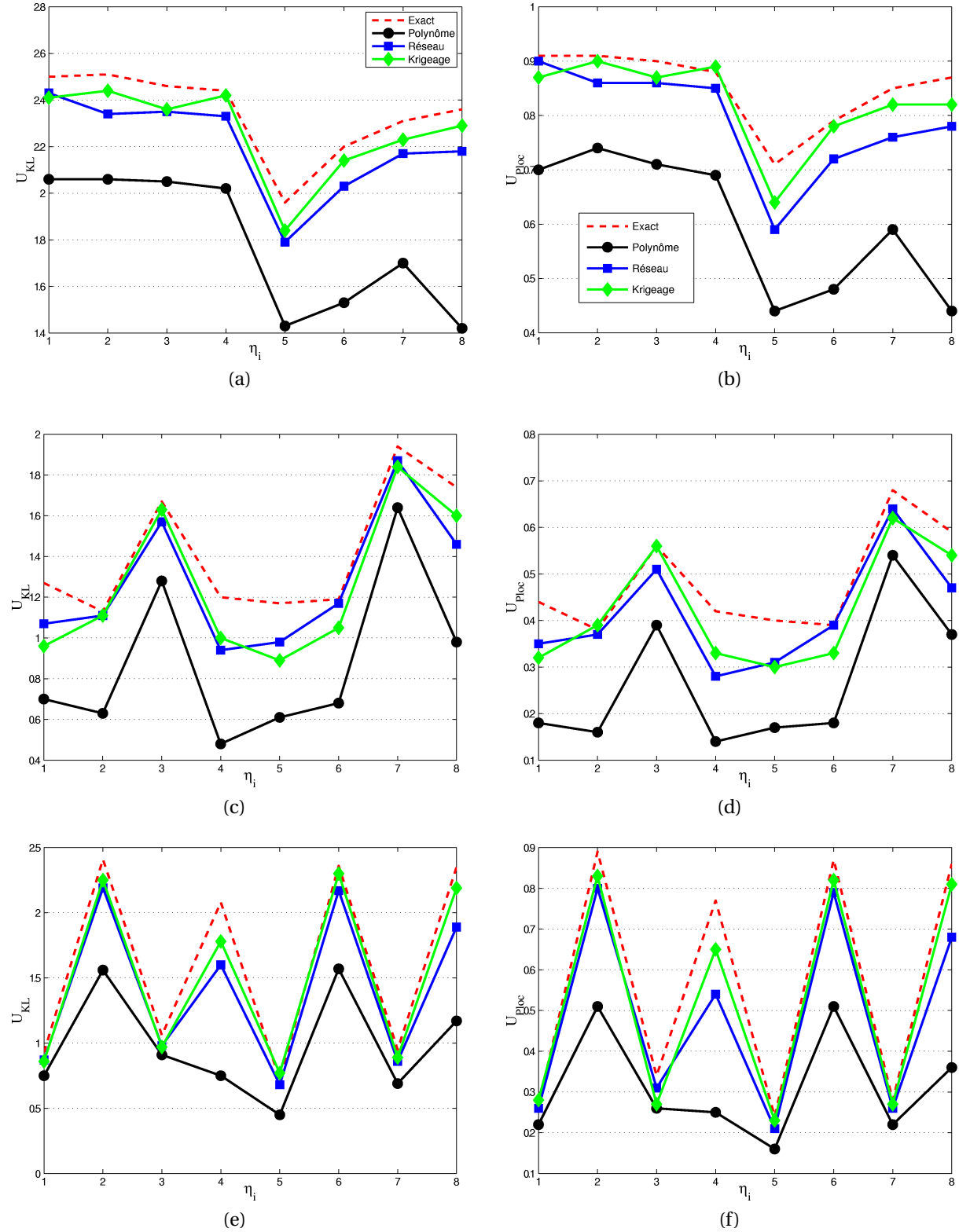
L'algorithme de Monte Carlo est lancé pour 200 000 itérations, le point de départ étant  $\mathbf{m}^{(0)}$ .

Pour chaque expérience, les échantillons sont utilisés pour calculer les fonctions (3.40) et (3.41). Les résultats sont regroupés dans la figure 3.14. Dans chaque cas, entre 1 000 et 2 000 échantillons quasi-i.i.d sont sélectionnés. Les valeurs de  $\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$  en fonction des huit protocoles  $\eta_i$  sont reportées dans la première colonne, les valeurs de  $\hat{U}_{Ploc}(\mathbf{d}, \eta)$  sont reportées dans la deuxième colonne. Les plus grandes valeurs de KLD sont celles associées au plus grand gain d'information. Plus  $\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$  est élevée, plus le niveau d'incertitude est diminué. Nous retrouvons sur les figures, les résultats de calculs réalisés avec les MEF exacts, les polynômes, les réseaux de neurones et les modèles de krigeage. Les prédictions des réseaux et krigeage sont très proches de celles obtenues avec le modèle exact. Les modèles polynomiaux n'ont pas le même niveau de précision mais fournissent à peu près les bonnes tendances. Ces résultats tendent à montrer que lorsqu'un métamodèle représente correctement la réponse d'intérêt, les résultats peuvent être considérés comme fiables.

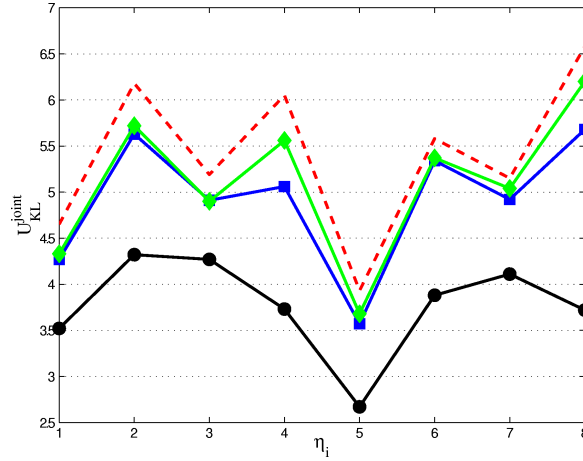
Selon l'expérience, le gain d'information est différent. Pour tous les protocoles expérimentaux une bonne information est obtenue pour le paramètre  $A_1$ . Ceci semble normal puisque ce paramètre possède toujours une forte énergie de déformation. Pour les mêmes raisons, le gain d'information est plus important pour  $A_3$  quand l'élément est encastré. Ainsi, nous pouvons conclure que  $A_1$  ou  $A_3$  seront plus identifiables avec une condition limite d'encastrement près de l'élément, l'énergie de déformation de l'élément étant augmentée dans ces conditions.  $A_2$  est au milieu de la seconde poutre, pour les protocoles  $\eta_1$  à  $\eta_8$ , le gain est plus ou moins sensible à la configuration. Au regard des résultats, il semble que les protocoles  $\eta_2$  et  $\eta_8$  donnent un bon gain d'information sur les trois paramètres. La figure 3.15, où sont tracées les KLD des densités de probabilité conjointes  $U_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta)$ , confirme

que ces deux protocoles apportent le plus d'information sur l'ensemble des paramètres du modèle et  $\mathbf{m} = \{A_1, A_2, A_3\}$ .

La probabilité  $\hat{U}_{\text{Ploc}}(\mathbf{d}, \eta)$  que  $m_k$  appartienne à une région centrée autour de  $m_k^{(0)}$  est un complément à  $\hat{U}_{\text{KL}}(\mathbf{d}, \eta)$ . Ici, l'évolution de  $\hat{U}_{\text{Ploc}}(\mathbf{d}, \eta)$  confirme celle de  $\hat{U}_{\text{KL}}(\mathbf{d}, \eta)$ . Cette tendance n'est cependant pas généralisable.



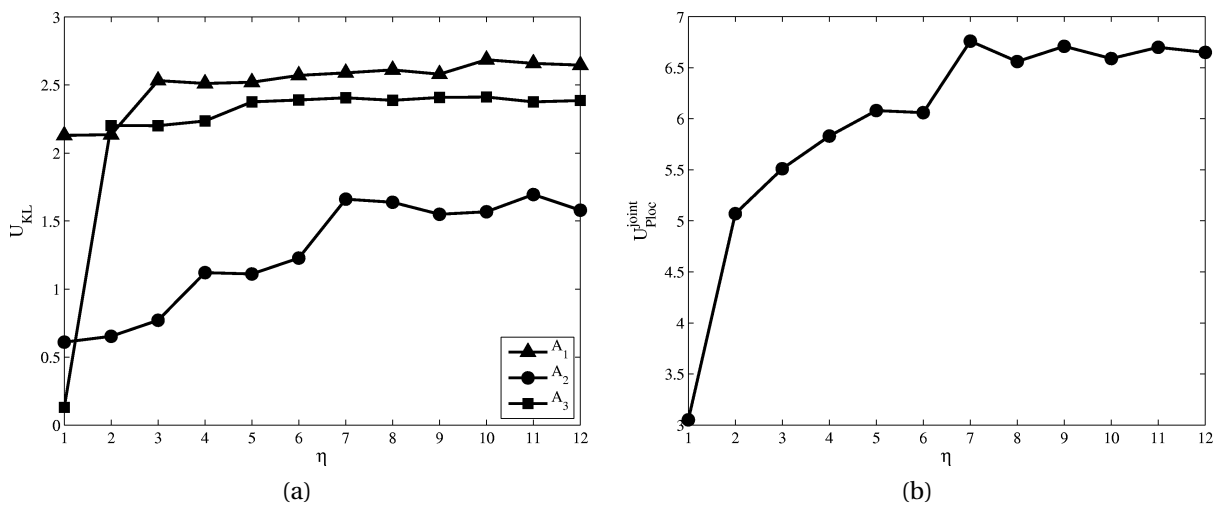
**Fig. 3.14** –  $\hat{U}_{\text{KL}}(\mathbf{d}, \eta)$  en fonction de  $\eta_i$  pour (a)  $A_1$ , (c)  $A_2$  et (e)  $A_3$  ;  $\hat{U}_{\text{Ploc}}(\mathbf{d}, \eta)$  en fonction de  $\eta_i$  pour (b)  $A_1$ , (d)  $A_2$  et (f)  $A_3$



**Fig. 3.15** –  $\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta)$  en fonction de  $\eta_i$

Les configurations  $\eta_2$  et  $\eta_8$  apportent sensiblement le même gain d'information. Si l'objectif est d'effectuer un minimum de test, nous pouvons de réaliser un de ces deux protocoles.

Puisque le protocole  $\eta_2$  donne de bons résultats, nous le choisissons et définissons maintenant les protocoles expérimentaux comme le nombre de fréquences propres utilisées comme données observables. Six ont été prises précédemment, l'analyse est conduite pour deux à treize fréquences propres. Le protocole  $\eta_j$  est maintenant la mesure des  $j + 1$  premières fréquences propres. Les évolutions des fonctions d'utilités  $\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$  et  $\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta)$  pour un protocole donné sont représentées figure 3.16. Les calculs ont été réalisés avec le MEF exact. Après le protocole  $\eta_7$ , le gain d'information évolue peu. Par conséquent, la mesure des huit premières fréquences propres semble suffisante pour obtenir un bon niveau d'information.

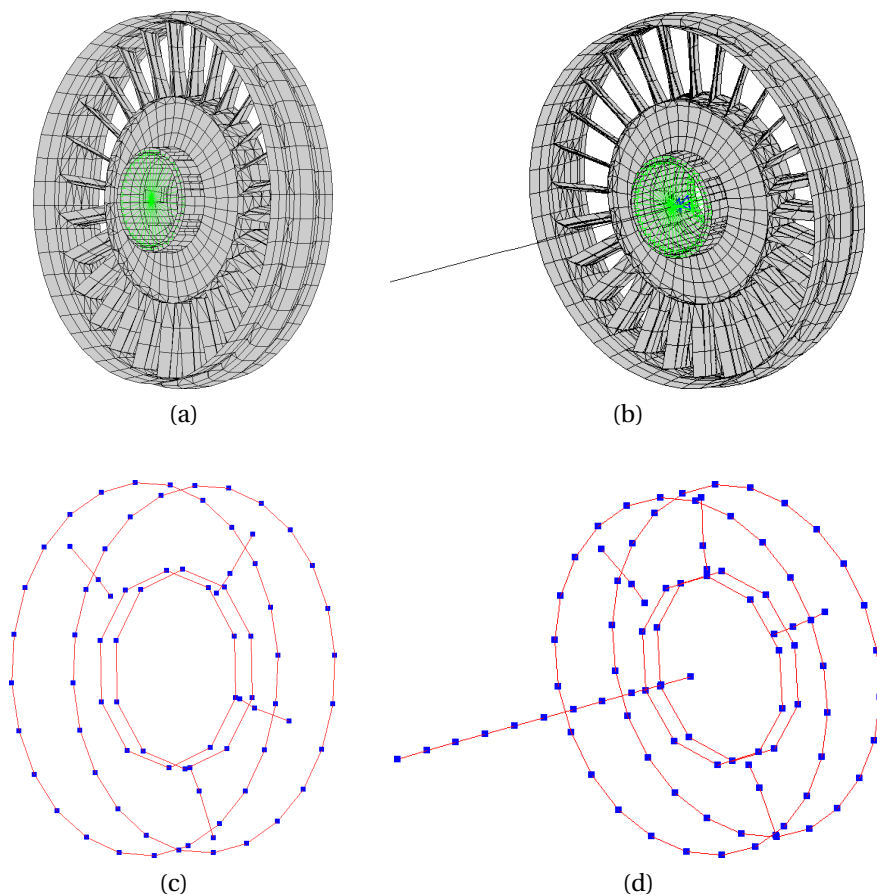


**Fig. 3.16** – Évolution des fonctions d'utilité pour la deuxième configuration : (a)  $\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$ , (b)  $\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta)$

Bien qu'académique, cet exemple illustre que certaines configurations peuvent être plus

informatives que d'autres mais aussi que le gain d'information peut être « saturé ». Multiplier les expériences n'est donc pas toujours utile.

### Carter de moteur

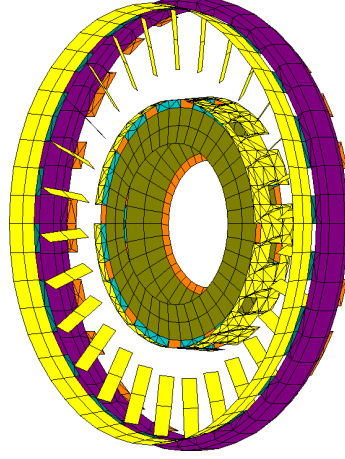


**Fig. 3.17** – (a) FBH ; (b) FBH-PS ; (c) points de mesures de FBH ; (d) points de mesures de FBH-PS

Dans cette application, nous nous intéressons au comportement dynamique de la sous-structure SS3 du rotor présenté figure 2.13. Des données expérimentales sont disponibles pour deux configurations de cette structure. Les figures 3.17a et 3.17c représentent respectivement le MEF de FBH en condition libre-libre et les points de mesures. La figure 3.17b représente la structure FBH en condition libre-libre mais chargée par un arbre. Le système sera appelé FBH dans la première configuration et FBH-PS dans la deuxième. Les points de mesures sur FBH-PS sont reportés figure 3.17d. De l'analyse modale expérimentale de ces deux configurations sur  $[0 ; 900 \text{ Hz}]$ , respectivement onze et douze fréquences et vecteurs propres sont extraits pour FBH et FBH-PS. Le MEF de FBH est plus raffiné que celui utilisé lors de la condensation du rotor. Ce MEF contient 18 144 ddl.

Seules les onze premières fréquences propres sont considérées. Supposons que nous cherchions à calibrer les deux MEFs vis-à-vis des fréquences expérimentales. Au préalable une étude de sensibilité de type Morris est réalisée. 47 paramètres, des épaisseurs d'éléments coques et des aires d'éléments poutres, sont sélectionnés pour être analysés. Pour tous les paramètres, les valeurs varient entre 0,5 et 1,5 fois les valeurs nominales. Après analyse, dix paramètres sont retenus. Les éléments finis concernés sont représentés figure 3.18. Une analyse de sensibilité dans la seconde configuration n'est pas exécutée. Peut être que les

paramètres influents sont différents. Notre but est de déterminer quelles sont les meilleures données pour recalibrer les deux MEFs avec les mêmes paramètres et ensuite de vérifier les résultats avec les mesures expérimentales. Les fréquences propres des deux configurations sont-elles assez informatives pour identifier les paramètres ? Avec la méthodologie présentée dans cette étude, nous allons quantifier l'information de ces deux protocoles expérimentaux.



**Fig. 3.18** – Éléments finis associé aux paramètres utilisés pour recalibrer FBH

Tout d'abord, pour chaque configuration, les données observées sont simulées avec les valeurs nominales du MEF. Pour FBH et FBH-PS, les deux protocoles expérimentaux sont la mesure des onze premières fréquences propres. Les données observées sont donc  $\mathbf{d}^{\text{obs}} = \{f_1, f_2, \dots, f_{11}\} = \{d_1^{\text{obs}}, d_2^{\text{obs}}, \dots, d_{11}^{\text{obs}}\}$ . Les deux protocoles sont respectivement notés  $\eta_{\text{FBH}}$  et  $\eta_{\text{FBH-PS}}$ . Un bruit gaussien est encore utilisé pour simuler les incertitudes expérimentales. Pour  $j = \{\text{FBH}; \text{FBH-PS}\}$ , nous avons

$$\rho_{\mathcal{D}}(\mathbf{d}, \eta_j) \propto \exp \left( -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{d_i - d_i^{\text{obs}}}{\sigma_i^{\text{obs}}} \right)^2 \right), \quad (3.49)$$

avec  $\sigma_i^{\text{obs}} = 0,02 \times d_i^{\text{obs}}$ .

$\mathbf{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_{10}\}$  contient les paramètres sélectionnés. L'ensemble nominal est noté  $\mathbf{m}^{(0)} = \{m_1^{(0)}, m_2^{(0)}, \dots, m_{10}^{(0)}\}$ . La densité *a priori* est uniforme et ces bornes sont  $B_k^{\text{inf}} = 0,5 \times m_k^{(0)}$  et  $B_k^{\text{sup}} = 1,5 \times m_k^{(0)}$ .

Le calcul exact n'étant pas possible, le krigeage est utilisé pour prédire les réponses du MEF. Les métamodèles sont construits avec une base d'apprentissages de 1 000 couples entrées-sorties, les paramètres prenant des valeurs entre 0,5 et 1,5 fois leurs valeurs nominales. Une base de test de 200 données est aussi calculée avant de tester les métamodèles. Le tableau 3.2 montre les résultats des comparaisons entre les sorties de la base de données et les sorties des modèles de krigeage. Les résultats sont excellents pour FBH-PS et FBH. La différence de précision est sûrement due à la plus faible variabilité des réponses de FBH-PS comparée à celles de FBH. Par conséquent, l'approximation est plus facile pour FBH-PS.

Avec  $\mathbf{m}^{(0)}$  comme point de départ, la simulation de Monte Carlo est fixée à 500 000 itérations.

**Tab. 3.2** – Erreurs du krigeage sur la base de test

Mode	FBH			FBH-PS		
	$R^2$	ERAM	MERA	$R^2$	ERAM	MERA
1	0,99	$7,19 \times 10^{-2}$	0,65	0,99	$5,84 \times 10^{-3}$	$2,11 \times 10^{-2}$
2	0,99	$6,68 \times 10^{-2}$	0,32	0,99	$5,54 \times 10^{-3}$	$2,56 \times 10^{-2}$
3	0,99	$6,68 \times 10^{-2}$	0,30	0,99	$5,53 \times 10^{-3}$	$2,56 \times 10^{-2}$
4	0,95	0,44	4,92	0,99	$2,14 \times 10^{-2}$	$7,36 \times 10^{-2}$
5	0,99	$6,76 \times 10^{-2}$	0,33	0,99	$2,37 \times 10^{-2}$	$8,56 \times 10^{-2}$
6	0,99	0,32	3,51	0,99	$5,99 \times 10^{-3}$	$3,08 \times 10^{-2}$
7	0,97	0,60	5,52	0,99	$1,41 \times 10^{-3}$	$6,82 \times 10^{-3}$
8	0,97	0,62	2,80	0,99	$1,40 \times 10^{-3}$	$6,81 \times 10^{-3}$
9	0,96	0,71	3,63	0,99	$1,86 \times 10^{-2}$	$7,79 \times 10^{-2}$
10	0,96	0,69	5,11	0,99	$1,86 \times 10^{-2}$	$7,79 \times 10^{-2}$
11	0,98	0,37	2,78	0,99	$3 \times 10^{-2}$	$0,11 \times 10^{-2}$

Les fonctions d'utilité  $\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta)$  et  $\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta)$  sont calculées avec 1 000 échantillons quasi-i.i.d. Les valeurs sont reportées dans le tableau 3.3. Nous observons que le gain d'information est plus important pour la première configuration. Pour l'identification paramétrique, les onze premières fréquences propres de FBH semblent donc les plus appropriées.

**Tab. 3.3** – Gain d'information pour les observations simulées

	FBH									
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$	$m_{10}$
$\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta_{FBH})$	0,45	0,34	0,06	0,61	0,01	0	0	0	0	0,06
$\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta_{FBH})$	3,43									
	FBH-PS									
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$	$m_{10}$
$\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta_{FBH-PS})$	0	0	0	0	0	0	0	0	0,11	0,49
$\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta_{FBH-PS})$	0,85									

L'analyse est maintenant réalisée avec les observations expérimentales. La simulation de Monte Carlo est exécutée de la même manière et après convergence. Les résultats du tableau 3.4 montrent que, comparées à celles obtenues avec les données simulées, les valeurs de fonctions d'utilité sont supérieures mais que  $\eta_{FBH}$  est toujours le protocole le plus informatif. Avec  $\eta_{FBH-PS}$ , seuls les trois derniers paramètres ont une information non nulle. Les valeurs moyennes des échantillons retenus ont été utilisées pour l'analyse modale de FBH et FBH-PS. L'ensemble des paramètres est noté  $\tilde{\mathbf{m}}_{FBH}$  pour FBH et  $\tilde{\mathbf{m}}_{FBH-PS}$  pour FBH-PS.

Dans le tableau 3.5, les erreurs relatives sont calculées pour les modes appariés ou quasi appariés. Avant et après analyse, le nombre de modes appariés est le même. Cela semble normal puisque seules les fréquences propres ont été utilisées pour l'identification. Avec  $\tilde{\mathbf{m}}_{FBH}$ , les erreurs sont diminuées de manière significative pour toutes les fréquences de FBH et pour sept modes de FBH-PS. Avec  $\tilde{\mathbf{m}}_{FBH-PS}$ , peu ou pas d'améliorations sont à noter.

Ces résultats confirment la conclusion de la première analyse, à savoir que la mesure des

**Tab. 3.4** – Gain d'information pour les observations expérimentales

FBH										
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$	$m_{10}$
$\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta_{FBH})$	1,97	0,48	1,39	1,55	0,13	0,07	0,80	0,11	0,50	0,49
$\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta_{FBH})$	8,51									
FBH-PS										
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$	$m_{10}$
$\hat{U}_{KL}(\mathbf{d}, \eta_{FBH-PS})$	0	0,06	0	0,06	0	0	0,15	2,63	2,86	1,51
$\hat{U}_{KL}^{joint}(\mathbf{d}, \eta_{FBH-PS})$	6,74									

fréquences propres provenant de FBH est importante pour calibrer les MEFs.

**Tab. 3.5** – Erreurs sur les fréquences pour différents ensembles de paramètres

FBH				
Mode	Expérimental	$\epsilon_f$ avec $\mathbf{m}_{FBH}^{(0)}$	$\epsilon_f$ avec $\tilde{\mathbf{m}}_{FBH}$	$\epsilon_f$ avec $\tilde{\mathbf{m}}_{FBH-PS}$
1	254,06	×	×	×
2	331,27	10,71	0,16	11,16
3	335,42	11,61	1,05	12,03
4	632,83	11,93	0,36	9,39
5	639,24	12,82	0,64	10,29
6	650,98	×	×	×
7	881,86	10,27	1,80	7,90
8	887,86	11,73	0,07	7,69
9	928,32	5,79	2,19	5,93
10	932,72	6,23	2,65	6,37
11	951,04	8,04	3,20	7,06
FBH-PS				
Mode	Expérimental	$\epsilon_f$ avec $\mathbf{m}_{FBH}^{(0)}$	$\epsilon_f$ avec $\tilde{\mathbf{m}}_{FBH}$	$\epsilon_f$ avec $\tilde{\mathbf{m}}_{FBH-PS}$
1	188,77	×	×	×
2	233,00	8,66	14,19	7,41
3	237,12	6,76	12,20	5,54
4	367,31	19,47	9,96	19,88
5	371,87	20,28	10,75	20,65
6	457,19	2,61	4,67	2,23
7	486,62	3,59	1,66	3,95
8	636,62	12,46	0,23	9,93
9	640,83	13,03	0,89	10,52
10	883,35	10,43	1,64	7,30
11	887,66	11,77	0,02	8,51



### 3.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une formulation générale du problème inverse permettant de combiner les informations *a priori* sur les observations et les paramètres avec d'éventuelles incertitudes sur le modèle afin d'obtenir une information *a posteriori* compatible avec les mesures. Cette procédure demande un algorithme d'échantillonnage dont le coût a été significativement réduit par l'utilisation de métamodèles.

Une approche bayésienne des plans d'expérience a été aussi utilisée pour estimer le contenu informatif des mesures expérimentales. Nous proposons dans cette étude d'utiliser un MEF de référence basé sur la connaissance du concepteur et de s'en servir pour simuler des données bruitées. Des densités de probabilités *a posteriori* associées avec les paramètres d'intérêt sont ensuite estimées par la théorie des problèmes inverses et finalement les fonctions d'utilité sont calculées. Le processus est répété pour diverses configurations ou conditions limites du MEF pour trouver les expériences maximisant le gain d'information.

# Aide à la décision par approche *info-gap*

## Sommaire

---

<b>4.1 La théorie <i>info-gap</i></b> . . . . .	<b>128</b>
4.1.1 Présentation . . . . .	128
4.1.2 Le modèle <i>info-gap</i> . . . . .	128
4.1.3 Les fonctions robustesse et opportunité . . . . .	129
4.1.4 Calcul de courbes de robustesse et d'opportunité . . . . .	129
<b>4.2 Évaluation de la robustesse des méthodes de recalage</b> . . . . .	<b>132</b>
4.2.1 Applications . . . . .	133
<b>4.3 De la robustesse des modèles optimaux</b> . . . . .	<b>135</b>
4.3.1 Illustration . . . . .	136
<b>4.4 Conclusions</b> . . . . .	<b>139</b>

---

Dans ce dernier chapitre, la théorie *info-gap* est exploitée pour la résolution de problèmes de conception robuste. Après la présentation de cette formulation, la méthode *info-gap* est appliquée pour évaluer la robustesse de deux méthodes de recalage. Dans la dernière section, nous étudierons la robustesse d'un modèle optimal pour un problème d'identification.

## 4.1 La théorie *info-gap*

### 4.1.1 Présentation

Proposée au début des années 90 par Ben-Haim et Elishakoff [19], la théorie *info-gap* a été développée afin de traiter des problèmes de décision en présence de très grandes incertitudes. L'incertitude *info-gap* peut être vue comme une combinaison de l'incertitude de Knight et du concept de rationalité limitée [194]. L'incertitude de Knight [101] décrit un risque pour lequel il n'existe pas de mesure objective de probabilité. Le concept de rationalité limitée développé par Simon [186], s'applique lorsque la rationalité de l'individu face à un choix est restreinte de par ses limites intellectuelles et son manque d'information. Face à des situations où l'information est manquante, incertaine, douteuse, où par exemple les ressources informatiques sont limitées, le décideur est invité à trouver une solution satisfaisante plutôt qu'une solution optimale. C'est là tout l'esprit de l'approche *info-gap*.

Un modèle *info-gap* définit l'écart – *gap* – entre ce qui est connu, la valeur nominale des paramètres dans notre cas, et l'information que nous avons besoin de connaître afin de satisfaire un critère de conception donné. C'est une quantification non-probabiliste de l'incertitude. Ce type de modèle sera présenté dans le paragraphe suivant.

Les applications de la théorie *info-gap* couvrent désormais un large panel de disciplines scientifiques. En ce qui concerne l'étude de modèles élastodynamiques, des travaux ont déjà concerné le recalage [18, 71], la fiabilité [202, 204], le positionnement optimal de capteurs et d'excitateurs [203] ou encore la conception de structures sismiques [195].

### 4.1.2 Le modèle *info-gap*

Lorsque les données sur les incertitudes sont limitées, une description probabiliste des incertitudes peut ne pas être fiable voire impossible à définir. La formulation *info-gap* permet de représenter de façon non-probabiliste ces incertitudes. Un modèle convexe *info-gap* définit l'écart entre le degré d'incertitude d'une variable incertaine autour de sa valeur nominale. Cet écart est caractérisé par un paramètre  $\alpha$ , appelé horizon d'incertitude.

De nombreux modèles *info-gap* existent [16]. Nous nous contentons ici de présenter le modèle dit *info-gap* enveloppe. Si  $\mathbf{c}$  est le vecteur de  $m$  paramètres incertains et  $\mathbf{c}^{(0)}$  celui des valeurs nominales de ces paramètres, alors une définition du modèle enveloppe est

$$U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)}) = \left\{ \mathbf{c} : \left| \frac{\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}}{\mathbf{c}^{(0)}} \right| \leq \mathbf{w}\alpha \right\}, \quad \alpha \geq 0, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad (4.1)$$

avec  $\mathbf{w}$  un vecteur de coefficients de pondération permettant d'affecter une valeur d'incertitude différente aux paramètres. Les valeurs de chaque paramètre  $c_i$  varient donc entre  $(1 - w_i \alpha) c_i^{(0)}$  et  $(1 + w_i \alpha) c_i^{(0)}$ .

Pour des paramètres  $\mathbf{c}$  dont on souhaiterait limiter la variation à l'intervalle  $[\mathbf{c}_{\min}; \mathbf{c}_{\max}]$ , on peut utiliser le modèle

$$U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)}) = \left\{ \mathbf{c} : (1 - \mathbf{w}\alpha) \mathbf{c}^{(0)} + \mathbf{w}\alpha \mathbf{c}_{\min} \leq \mathbf{c} \leq (1 - \mathbf{w}\alpha) \mathbf{c}^{(0)} + \mathbf{w}\alpha \mathbf{c}_{\max} \right\}, \quad (4.2)$$

$$\alpha \geq 0, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^{m \times 1}.$$

Pour des paramètres de variation logarithmique, nous proposons le modèle

$$U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)}) = \left\{ \mathbf{c} : \left| \log \left( \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}^{(0)}} \right) \right| \leq \mathbf{w}\alpha \right\}, \quad \alpha \geq 0, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^m. \quad (4.3)$$

Les modèles *info-gap*  $U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)})$  suivent la propriété d'inclusion, c'est-à-dire que

$$\alpha \leq \alpha' \Rightarrow U(\alpha, \mathbf{c}_{(0)}) \in U(\alpha', \mathbf{c}^{(0)}). \quad (4.4)$$

Le degré d'incertitude augmente donc lorsque le paramètre incertain  $\alpha$  augmente.

### 4.1.3 Les fonctions robustesse et opportunité

Soit  $\mathbf{p}$  le vecteur des paramètres de conception à ne pas confondre avec les paramètres incertains  $\mathbf{c}$  dont l'incertitude est représentée par exemple par les équations (4.1) ou (4.3). Soit  $\mathbf{q}$  un vecteur réunissant les paramètres de conception et les paramètres incertains. Soit  $R(\mathbf{q})$  une mesure de performance et  $r_c$  la valeur critique liée à celle-ci. Par exemple,  $R(\mathbf{q})$  peut être l'erreur relative absolue par rapport à la valeur nominale des paramètres.

La formulation *info-gap* repose principalement sur l'utilisation de fonctions de robustesse et d'opportunité.

La fonction robustesse exprime le plus grand niveau d'incertitude pour lequel aucune défaillance ne peut avoir lieu [16]. La définition utilisée dans cette étude est

$$\hat{\alpha}(\mathbf{p}, r_c) = \max \left\{ \alpha : \max_{\mathbf{c} \in U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)})} R(\mathbf{q}) \leq r_c \right\}. \quad (4.5)$$

La robustesse représente ici le plus grand niveau d'incertitude pour lequel la valeur critique  $r_c$  de la mesure de performance ne peut être dépassée. Nous obtenons des courbes de robustesse en traçant l'évolution de  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, r_c)$  en fonction de  $r_c$ .

La fonction opportunité exprime le plus faible niveau d'incertitude pour lequel une performance espérée peut se produire. En effet, les incertitudes peuvent avoir de effets néfastes mais aussi bénéfiques sur la performance d'un système. Le pendant de l'équation (4.5) pour l'opportunité est

$$\hat{\beta}(\mathbf{p}, r_c) = \min \left\{ \alpha : \min_{\mathbf{c} \in U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)})} R(\mathbf{q}) \leq r_w \right\}. \quad (4.6)$$

L'opportunité représente ici le plus faible niveau d'incertitude pour lequel une valeur rêvée  $r_w$  de la mesure de performance ne peut être atteinte.

Les courbes de robustesse et d'opportunité sont des fonctions monotones. Pour les définitions proposées ici, ces courbes sont respectivement croissante et décroissante.

Nous n'avons considéré ici qu'un seul critère de performance. Il est cependant possible d'étendre cette approche à des problèmes nécessitant la prise en compte de plusieurs mesures de performances [202, 204].

### 4.1.4 Calcul de courbes de robustesse et d'opportunité

Des équations (4.5) et (4.6), il découle que des calculs d'optimisation sont nécessaires pour l'obtention des courbes de robustesse et d'opportunité. Prenons par exemple la fonc-

tion robustesse. Si l'on souhaite déterminer  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, r_c)$  pour une valeur critique  $r_c$  donnée, il faut résoudre un problème non-linéaire pour lequel bien souvent aucune solution analytique simple n'existe. Un algorithme itératif permettant de résoudre ce problème est décrit dans [202, 204]. Partant d'une valeur de  $\alpha$  empirique, cet algorithme combine interpolations et optimisations afin d'aboutir itérativement au  $r_c$  désiré et au  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, r_c)$  correspondant. Cette approche est très coûteuse. Dans la pratique, ce n'est pas  $r_c$  que l'on fixe mais  $\alpha$ . Ainsi, une série de valeurs  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_{n_\alpha}\}$  est définie pour  $\alpha$ , puis, pour chaque  $\alpha_i$ , le problème d'optimisation

$$r_{c,\alpha_i} = \max_{\mathbf{c} \in U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)})} R(\mathbf{q}) \quad (4.7)$$

est résolu dans le cas de l'équation (4.5).

Pour l'équation (4.6), l'optimisation porte sur

$$r_{w,\alpha_i} = \min_{\mathbf{c} \in U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)})} R(\mathbf{q}). \quad (4.8)$$

Cette approche reste encore très coûteuse. De plus, il reste à savoir si l'on peut faire confiance à l'algorithme d'optimisation utilisé. Là encore, une incertitude mériterait d'être introduite.

Une autre approche sera utilisée dans ce travail. Elle consiste à démarrer avec  $\alpha_0 = 0$ , calculer la mesure de performance correspondante  $R(\mathbf{q}, \alpha_0)$ , puis incrémenter  $\alpha_0$  d'une faible valeur, calculer la mesure de performance pour toutes les combinaisons où les paramètres  $p_i \in \mathbf{p}$  atteignent leurs bornes, et ainsi de suite.

Prenons par exemple un système masse-ressort de raideur  $k_r$  et de masse  $m_r$  de valeurs nominales  $k_r^{(0)} = 2,7 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1}$  et  $m_r^{(0)} = 4 \text{ kg}$ . La fréquence propre du système est donnée par

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_r}{m_r}}. \quad (4.9)$$

Ici, nous considérons les deux paramètres incertains et donc  $\mathbf{q} = \mathbf{c} = [k_r \ m_r]^T$ . La fonction de performance est

$$R(\mathbf{q}) = 100 \times \frac{|f_p^{\text{ref}} - f_p|}{f_p^{\text{ref}}}, \quad (4.10)$$

où  $f_p^{\text{ref}} = 900 \text{ Hz}$  est par exemple une mesure expérimentale. Le modèle *info-gap* choisi est le modèle enveloppe.

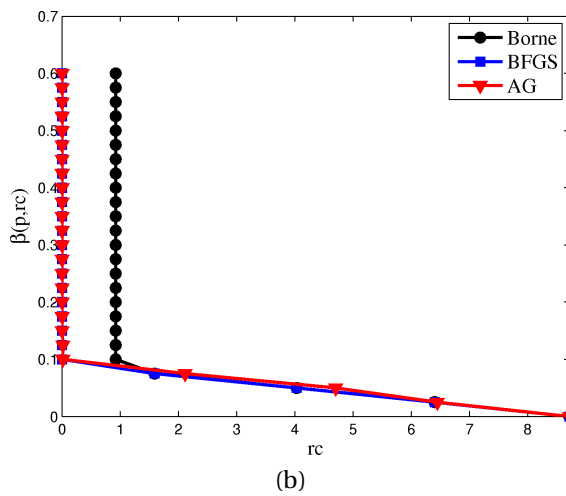
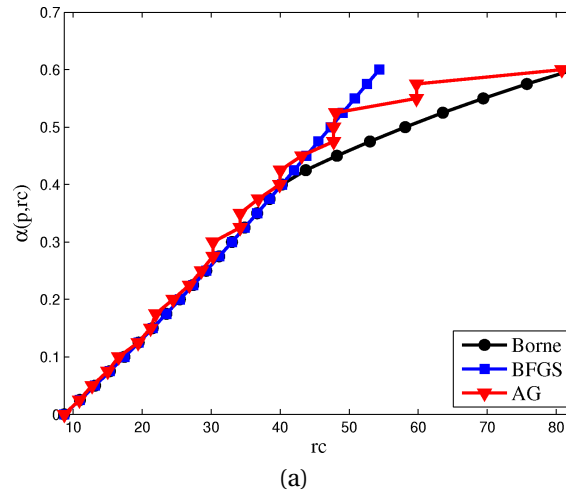
Le premier pas est le calcul de  $R(\mathbf{q})$  pour  $\alpha_0 = 0$ . Nous obtenons  $R(\mathbf{q}, \alpha_0) = 8,71 \%$ . Ensuite, nous incrémentons  $\alpha_0$  d'un pas de 0,025 pour obtenir  $\alpha_1 = 0,025$  et calculons  $R(\mathbf{q}, \alpha_1)$  pour

$$\begin{aligned} k_r &= (1 - \alpha) k_r^{(0)} = 2,6325 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1} & \text{et} & \quad m_r = (1 - \alpha) m_r^{(0)} = 3,9 \text{ kg}, \\ k_r &= (1 - \alpha) k_r^{(0)} = 2,6325 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1} & \text{et} & \quad m_r = (1 + \alpha) m_r^{(0)} = 4,1 \text{ kg}, \\ k_r &= (1 + \alpha) k_r^{(0)} = 2,7675 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1} & \text{et} & \quad m_r = (1 - \alpha) m_r^{(0)} = 3,9 \text{ kg}, \\ k_r &= (1 + \alpha) k_r^{(0)} = 2,7675 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1} & \text{et} & \quad m_r = (1 + \alpha) m_r^{(0)} = 4,9 \text{ kg}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

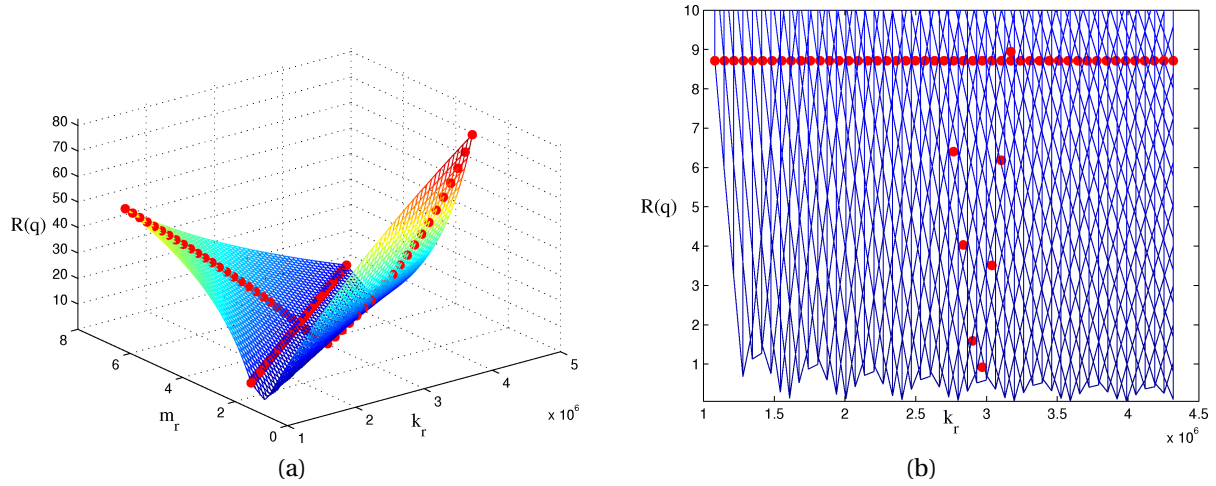
Pour ces quatre modèles, les valeurs de  $R(\mathbf{q}, \alpha_1)$  sont respectivement 8,7129 %, 10,967 %, 6,4015 % et 8,7129 %. Pour la courbe de robustesse, le maximum est retenu et donc  $r_{c,\alpha_1} = 10,967 \%$ . Pour la courbe d'opportunité, le minimum est retenu et donc  $r_{w,\alpha_1} = 6,4015 \%$ .

Le calcul est ensuite poursuivi par incrément progressif de  $\alpha$  afin d'obtenir les courbes de robustesse et d'opportunité. Les figures 4.1a et 4.1b montrent les courbes obtenues par cette méthode – que nous désignerons par méthode « borne » –, une méthode d'optimisation par algorithme génétique – AG – et une méthode d'optimisation itératif de type BFGS [29, 136]. Les courbes ont été construites pour des valeurs de  $\alpha$  allant de 0 à 0,6 avec des pas de 0,025, soit 25 valeurs de  $\alpha$ . Nous remarquons que pour la courbe de robustesse, seule la méthode borne permet d'aboutir à des résultats corrects. De plus, la méthode borne a nécessité  $1 + 24 \times 2^2 = 97$  calculs, contre 965 pour l'AG et 793 pour l'optimisation BFGS. Par contre, pour la courbe d'opportunité la méthode borne s'avère moins performante. Pour comprendre pourquoi, observons les figures 4.2a et 4.2b. Ces surfaces représentent l'évolution de  $R(\mathbf{q})$  en fonction des variations de  $\mathbf{q}$  sur  $[(1 - \alpha)\mathbf{q} ; (1 + \alpha)\mathbf{q}]$ . Les points marquent les couples  $(k_r, m_r)$  évalués durant les itérations de la méthode borne. La projection 4.2b sur le plan  $(k_r, R(\mathbf{q}))$  montre qu'il n'est pas possible avec la méthode borne d'atteindre le minimum de  $R(\mathbf{q})$ . C'est pourquoi, cette méthode est inadaptée pour le calcul des courbes d'opportunité telles que définies équation (4.6).

Dans cette étude, seules des courbes de robustesse sont calculées. Des tests sur plusieurs applications nous ont conduit à préférer la méthode borne pour le calcul des fonctions robustesse.



**Fig. 4.1** – Pour la méthode borne, AG et BFGS : (a) fonction robustesse ; (b) fonction opportunité



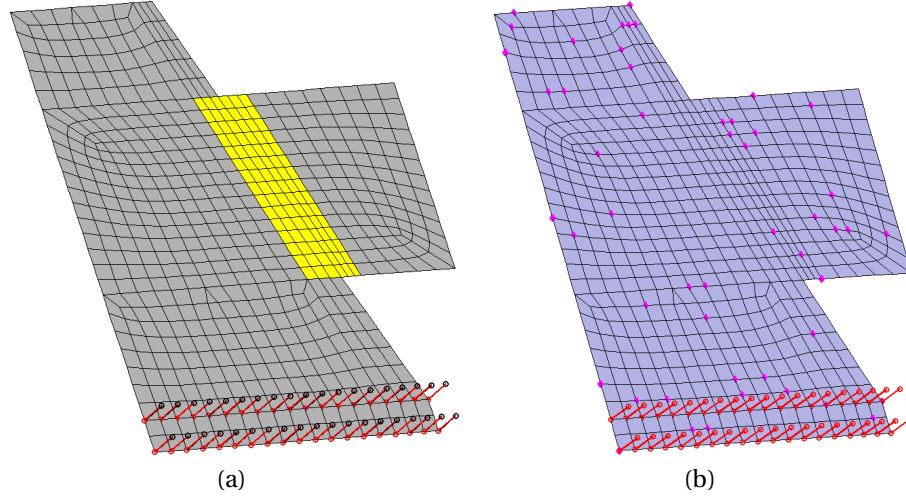
**Fig. 4.2** – (a) Évolution de  $R(q)$  pour  $q \in [(1 - \alpha)q; (1 + \alpha)q]$ ; (b) projection sur  $(k_r, R(q))$

## 4.2 Évaluation de la robustesse des méthodes de recalage

Le recalage de modèle élastodynamique a fait l'objet de nombreuses recherches. Cette procédure consiste à modifier certains paramètres d'un modèle numérique pour que celui-ci approche au mieux le comportement dynamique de la structure qu'il représente. De nombreuses méthodes de recalage ont été développées ces dernières années [149]. Elles peuvent être classées généralement en deux types. Les méthodes directes agissent directement sur les matrices de raideur et de masse et proposent souvent des solutions non-physiques. Les méthodes itératives, les plus utilisées, utilisent les données modales ou les réponses fréquentielles pour minimiser une fonction coût. Elles demandent souvent plus de calculs mais ont l'avantage de laisser son caractère physique au modèle. Nous nous intéresserons ici à cette deuxième classe de méthodes.

Nous pouvons être amenés à nous demander comment les incertitudes inhérentes à la modélisation affectent la précision du recalage. La question est alors de savoir si la méthodologie de recalage utilisée est robuste vis-à-vis des incertitudes sur certains paramètres non pris en compte dans le processus de recalage. Pour tenter de répondre à cette question, la formulation *info-gap* est utilisée dans cette étude. Deux méthodes de recalage seront testées : une méthode classique de recalage par sensibilité et une méthode de recalage basée sur l'erreur en relation de comportement [45–47]. On trouvera en annexe D le détail de ces deux procédures.

Avant de présenter deux applications, précisons que nous nous plaçons dans le contexte où nous possédons un MEF à  $N$  ddl et des mesures expérimentales effectuées en  $c$  points de la structure que le modèle représente. Les vecteurs propres expérimentaux doivent être étendus par une méthode telle que par exemple l'expansion MDRE présentée au paragraphe 1.5.2. On pourra trouver dans [10, 45] plus de précisions sur les méthodologies d'expansion.



**Fig. 4.3** – (a) : MEF de plaque ; (b) : MEF et points de mesure

### 4.2.1 Applications

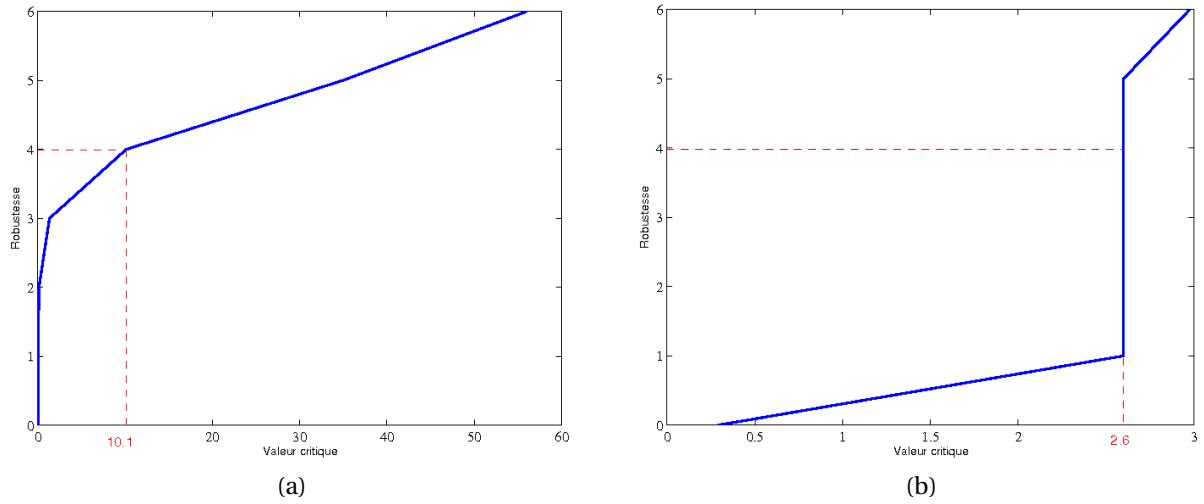
#### Plaque

La première structure étudiée est une plaque représentée figures 4.3a et 4.3b. La structure est modélisée par un MEF comportant 614 éléments coques et 38 éléments ressorts soit un total de 4 206 ddls. Les ressorts présents à la base représentent grossièrement un boulonnage de la structure sur un socle rigide. Ces éléments qui apparaissent en traits rouges sur les figures 4.3a et 4.3b, ont une propriété élastique commune PELAS de valeur nominale  $10^{11} \text{ N.m}^{-1}$ . Deux propriétés PSHELL sont associées aux éléments coque, PSHELL1 pour les éléments apparaissant en gris sur la figure 4.3a et PSHELL2 pour les éléments apparaissant en jaunes. Les épaisseurs nominales associées à ces deux propriétés sont respectivement 0,02 m et 0,05 m. Les mesures expérimentales sont simulées à partir du modèle nominal. Les 50 ddls mesurés sont représentés par les points roses sur la figure 4.3b.

Le paramètre à recalcr est  $\mathbf{p} = \text{PSHELL2}$ . La valeur de départ est 0,02 m. Le paramètre incertain est  $\mathbf{c} = \text{PELAS}$  et le modèle *info-gap* associé est donné par l'équation (4.3). La fonction performance  $R(\mathbf{q})$  est l'erreur relative absolue entre la valeur nominale de  $\mathbf{p}$  et sa valeur après recalage. Pour les deux méthodes exposées en annexe D et pour douze solutions propres, les courbes de robustesse sont déterminées pour  $\alpha = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Les évolutions de la robustesse en fonction du critère sur la fonction performance sont fournies figures 4.4a et 4.4b.

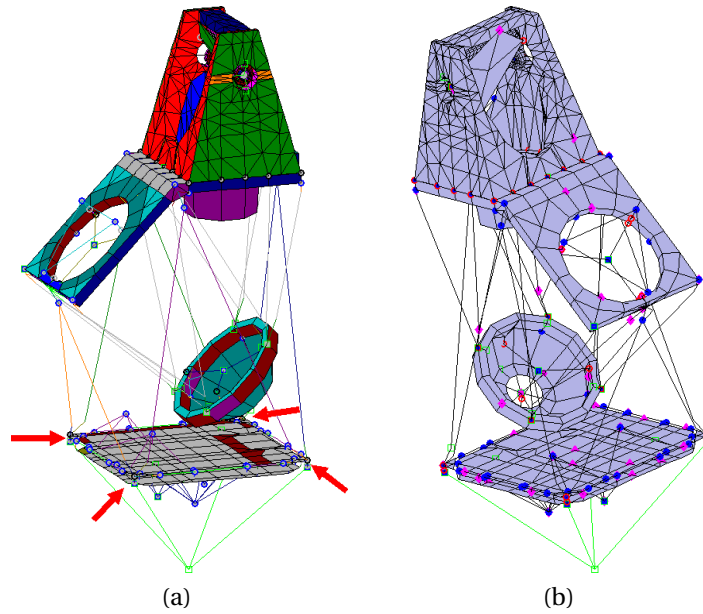
On constate que le recalage basé sur l'ERDC est plus robuste que celui basé sur la sensibilité des solutions propres. En effet, pour une même valeur de robustesse  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{c})$ , la valeur critique  $r_c$  associée à la méthode par sensibilité est plus importante que pour la méthode par ERDC. Ainsi, bien que le paramètre  $\mathbf{c}$  ne soit pas pris en compte dans la procédure de recalage, la méthode par ERDC est moins influencée par les variations de  $\mathbf{c}$  que le recalage par sensibilité. Par exemple, pour une robustesse de 4, c'est-à-dire d'après l'équation (4.3)  $10^7 \text{ N.m}^{-1} \leq \mathbf{c} \leq 10^{15} \text{ N.m}^{-1}$ , les figures 4.4a et 4.4b montrent que l'erreur relative maximale sera la valeur critique  $r_c = 10,1 \%$  pour le recalage par sensibilité mais seulement  $r_c = 2,6 \%$  pour le recalage par CRE.





**Fig. 4.4** – Fonction robustesse : (a) recalage par sensibilité, (b) recalage par CRE

### Structure HRG



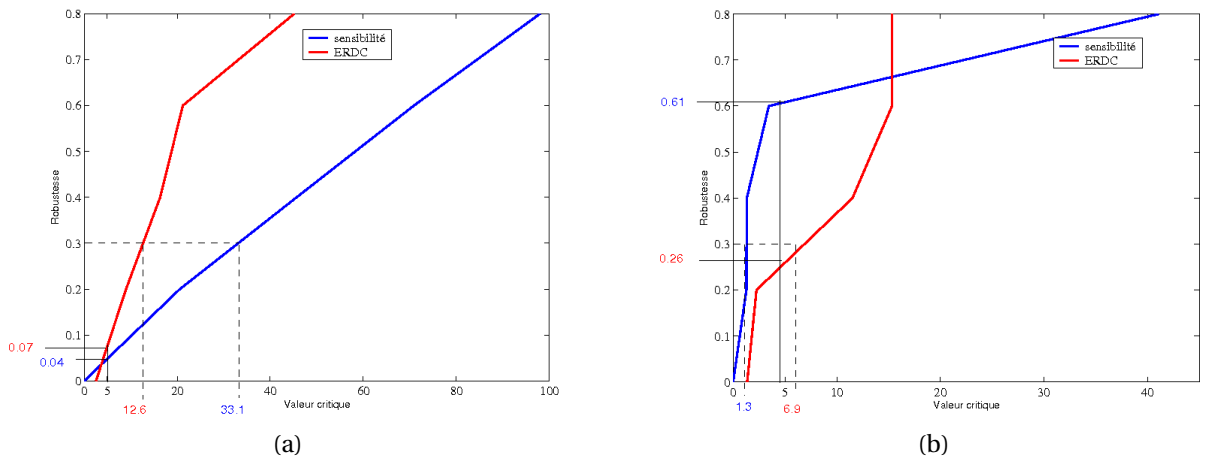
**Fig. 4.5** – (a) : MEF de la structure HRG ; (b) : MEF et points de mesure

Nous nous intéressons ici à l'instrument HRG du satellite SPOT 5 – figure 4.5a. Le MEF de cette structure est composé de 3 096 éléments coques, 64 éléments volumiques, 689 éléments poutres, 39 éléments barres, 148 masses ponctuelles et 289 éléments ressorts, soit un total de 16 950 ddl. Une étude de sensibilité a amené à s'intéresser à trois propriétés nommées PELAS1, PELAS2 et PELAS3 associées chacune à quatre éléments ressorts localisés par les flèches rouges figure 4.5a. Les raideurs nominales de ces propriétés sont respectivement  $10^8 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $10^7 \text{ N.m}^{-1}$  et  $10^7 \text{ N.m}^{-1}$ . Les paramètres à recalibrer sont  $\mathbf{p} = [\text{PELAS1 PELAS2}]^T$  et  $\mathbf{c} = \text{PELAS3}$  est un paramètre incertain. Le modèle *info-gap* associé à ce paramètre est donné équation (4.1). Là encore, les mesures expérimentales sont simulées à partir du modèle nominal. Les 80 ddl mesurés sont représentés par les points roses sur la figure 4.5b.

Avant recalage, les valeurs des paramètres sont égales à deux fois les valeurs nominales de  $\mathbf{p}$ . L'évolution des fonctions robustesses associées aux différentes procédures sont fournies

figures 4.6a et 4.6b. Les calculs ont été réalisés pour  $\alpha = \{0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8\}$  et pour 10 solutions propres.

Deux paramètres ont été recalés. Les figures 4.6a et 4.6b montrent que le recalage du paramètre PELAS1 est plus sensible aux incertitudes sur  $\mathbf{c}$  que le paramètre PELAS2. Pour une robustesse de 0,3, c'est-à-dire  $7 \times 10^6 \text{ N.m}^{-1} \leq \mathbf{c} \leq 1,3 \times 10^7 \text{ N.m}^{-1}$ , nous constatons sur la figure 4.6a que la valeur critique, c'est à dire l'erreur sur la valeur de PELAS1 par rapport à sa valeur nominale, est de  $r_c = 33,1 \%$  pour le recalage par sensibilité et de  $r_c = 12,6 \%$  pour le recalage par ERDC. Pour les deux méthodes, l'erreur après recalage est donc assez importante. Figure 4.6b, nous avons la courbe de robustesse pour le paramètre PELAS2. Les erreurs sont plus faibles avec, toujours pour une robustesse de 0,3, une valeur critique de  $r_c = 1,3 \%$  pour la méthode par sensibilité et  $r_c = 6,9 \%$  pour le recalage par ERDC. Si nous nous fixons par exemple comme erreur maximale sur les paramètres la valeur critique  $r_c = 5 \%$ , alors pour le paramètre PELAS1 la robustesse est de 0,07 pour le recalage par sensibilité et de 0,04 pour le recalage par ERDC. Elle est faible dans les deux cas. Pour le paramètre PELAS2, la robustesse est de 0,61 pour l'approche sensibilité et de 0,26 pour le recalage ERDC. La méthode par CRE est donc la plus robuste pour  $r_c = 5 \%$ . Nous constatons dans cette application que la robustesse aux incertitudes dépend de la méthode mais aussi des paramètres recalés.



**Fig. 4.6** – Fonctions robustesse en fonction du type de recalage : (a) PELAS1, (b) PELAS2

### 4.3 De la robustesse des modèles optimaux

Nous allons montrer dans cette section qu'un modèle sous-optimal peut s'avérer plus robuste que le modèle optimal. Ce fait a déjà été mis en évidence dans [17] et [195]. Dans la première référence, l'auteur illustre cette propriété sur un exemple académique. Le but est de recalculer un modèle linéaire à partir d'une mesure issue d'un modèle non-linéaire. Dans la deuxième référence, les auteurs s'intéressent à la conception de structures du génie civil soumises à des excitations sismiques, les incertitudes portant sur l'intensité des chargements et les paramètres d'amortissement. Dans les deux cas, les applications proposées, permettent d'obtenir analytiquement les courbes de robustesse. Nous nous intéressons ici à des problèmes élastodynamiques ne permettant pas de calculs explicites. La procédure décrite par le paragraphe 4.1.4 sera utilisée pour déterminer les courbes de robustesse.

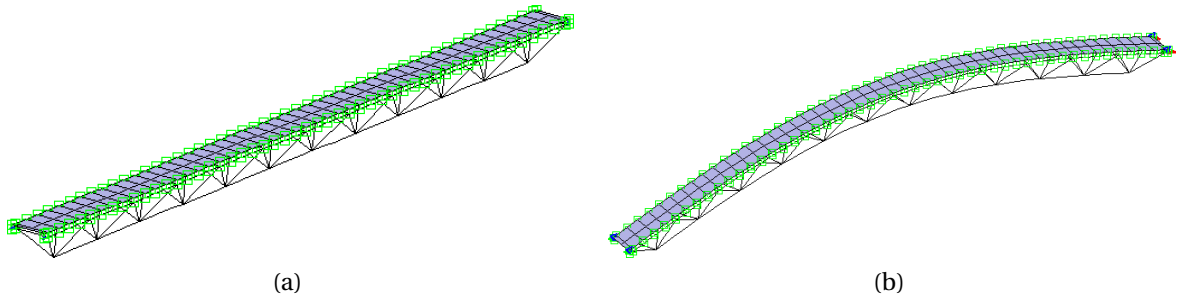
Deux types de problèmes seront considérés ici. Nous avons dans les deux cas des paramètres de conception  $\mathbf{p}$ , la différence porte sur le type d'incertitudes considérées :

- soit l'incertitude porte sur des paramètres de même nature que  $\mathbf{p}$ , ce sont des incertitudes paramétriques ;
- soit l'incertitude porte sur la nature du modèle elle-même, ce sont des incertitudes de modélisation de type épistémiques.

Le premier cas se comprend aisément, le deuxième mérite quelques explications. Nous parlons ici de MEFs dont le modèle mathématique est localement une représentation simplifiée ou erronée de la réalité. Cette simplification pouvant être volontaire ou non. Par exemple, il est clair que les éléments de jonctions des systèmes mécaniques – boulonnages, collages, rivetages, soudages, *etc.* – ont bien souvent un comportement non-linéaire. Pourtant, ils sont dans la plupart du temps modélisés linéairement, soit volontairement afin d'accélérer les calculs, soit par manque de connaissance des phénomènes mis en jeu. La géométrie de la structure réelle peut aussi avoir été mal représentée. Voilà ce que nous entendons par incertitudes de modélisations.

Nous nous intéressons ici à évaluer la robustesse des modèles optimaux. À travers une application, nous allons constater que dans un environnement incertain, il peut être préférable de choisir un modèle sous-optimal mais « satisfaisant » plutôt qu'un modèle optimal.

#### 4.3.1 Illustration



**Fig. 4.7** – Deux conceptions d'une passerelle : (a) passerelle droite ; (b) passerelle courbe

Considérons deux conceptions proposées pour une passerelle. Les MEFs présentés figures 4.7a et 4.7b comportent tous deux 1 976 ddls. La modélisation consiste en un treillis de poutres métalliques surmonté d'un tablier en béton. Les propriétés matériaux sont les mêmes, la portée est la même, seule la courbure diffère.

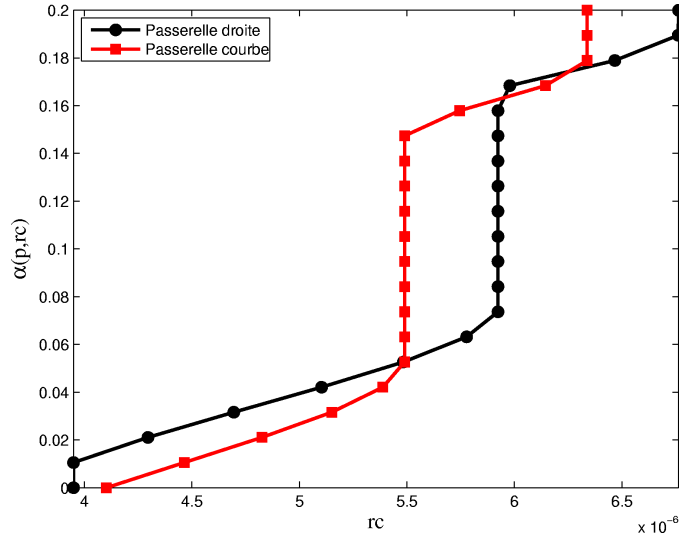
Les modèles peuvent être décomposés en deux sous-domaines : le tablier et le treillis métallique. Les raideurs de ces deux sous-domaines sont considérées comme incertaines. Nous avons  $\mathbf{c} = [\kappa_1 \ \kappa_2]^T$ , où  $\kappa_1$  est un coefficient appliqué devant la matrice de raideur du treillis et  $\kappa_2$  un coefficient appliqué devant la matrice de raideur du tablier. Les paramètres de conception  $\mathbf{p}$  sont ici fixés. Le modèle *info-gap* associé aux paramètres incertains est le modèle enveloppe

$$U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)}) = \left\{ \mathbf{c} : \left| \frac{\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}}{\mathbf{c}^{(0)}} \right| \leq \alpha \right\}, \quad \alpha \geq 0, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2, \quad (4.12)$$

avec  $\mathbf{c}^{(0)} = [1 \ 1]^T$ .

Supposons qu'un critère de performance spécifié dans le cahier des charges soit le maximum de l'amplitude d'une FRF mesurée sur  $[0 ; 20 \text{ Hz}]$  pour une excitation et une mesure en un point central du tablier.

Pour les deux conceptions, nous avons tracé pour différentes valeurs de  $\alpha$ , la robustesse définie équation (4.5) en fonction de la valeur critique  $r_c$  associées à  $R(\mathbf{q})$ . Vingt valeurs de  $\alpha$  réparties régulièrement entre 0 et 0,2 ont été choisies. Pour calculer les FRFs, une base modale de 25 modes et un coefficient d'amortissement de 0,02 % sont utilisés. Les 25 modes considérés couvrent environ la plage  $[0 ; 50 \text{ Hz}]$ . Nous obtenons les deux courbes de robustesse de la figure 4.8.



**Fig. 4.8** –  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{c})$  en fonction de  $r_c$  pour deux conceptions de passerelle

Pour les deux modèles, lorsque la performance est optimale, c'est-à-dire que l'amplitude maximale de la FRF est la plus faible, la robustesse est nulle. Un modèle optimal n'a aucune robustesse aux incertitudes. La performance du système n'est donc pas fiable puisque la moindre variation des paramètres incertains est susceptible d'entraîner une dégradation des résultats. Nous constatons que la passerelle droite permet d'obtenir la meilleure performance. Nous le désignerons par modèle performance-optimal. Le modèle poutre courbe est donc non-performance-optimal. Cependant, à mesure que le critère de performance  $r_c$  devient moins sévère, les courbes de robustesse se rapprochent et viennent à se croiser. Pour un même critère de performance, il peut donc arriver que le modèle non-performance-optimal soit plus robuste que le modèle performance-optimal. Pour certains niveaux de performance, le modèle non-performance-optimal devient en quelque sorte optimal-robuste.

Supposons désormais que la passerelle courbe soit une représentation fidèle de la réalité. Ce modèle sera donc considéré comme la réalité et ses réponses seront qualifiées d'expérimentales. La valeur des dix premières fréquences propres sont ainsi disponibles. Nous souhaitons calibrer le MEF afin de minimiser l'écart avec ces mesures. Prenons la situation où un concepteur peu expérimenté ou maladroit aurait modélisé cette passerelle légèrement courbe par une passerelle droite. Sachant que le modèle est fondamentalement erroné, qu'est-ce que le recalage de ce modèle implique en terme de robustesse ? Nous considérons toujours les deux coefficients de raideur comme incertains. Souhaitant limiter leur espace

de variation, le modèle *info-gap* choisit est

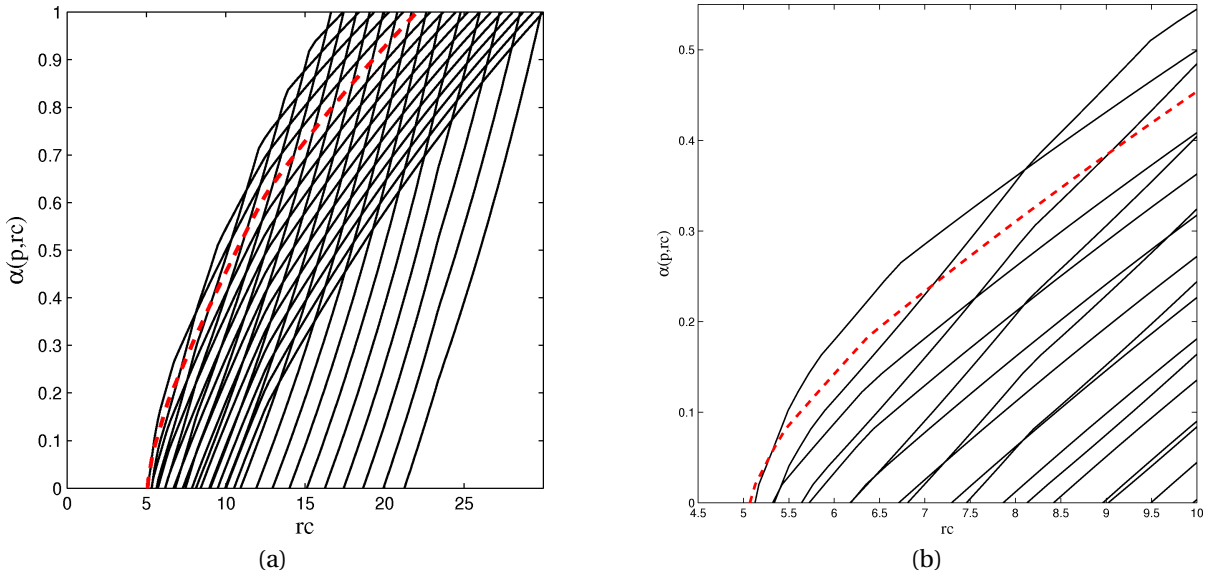
$$U(\alpha, \mathbf{c}^{(0)}) = \{\mathbf{c} : (1 - \alpha) \mathbf{c}^{(0)} + \alpha \mathbf{c}_{\min} \leq \mathbf{c} \leq (1 - \alpha) \mathbf{c}^{(0)} + \alpha \mathbf{c}_{\max}\}, \quad \alpha \geq 0, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^m. \quad (4.13)$$

avec  $\mathbf{c}_{\min} = [0, 80, 8]^T$ ,  $\mathbf{c}_{\max} = [1, 21, 2]^T$  et toujours  $\mathbf{c}^{(0)} = [11]^T$ .

Un coefficient à appliquer à la matrice de masse du treillis de poutre est pris comme paramètre de conception  $p$ . Sa valeur nominale est  $p^{(0)} = 1$ . Nous n'utilisons pas ici une méthode de recalage. La mesure de performance est l'erreur absolue moyenne ERAM calculée par rapport aux dix fréquences propres mesurées sur la passerelle courbe. 50 valeurs de  $\alpha$  distribuées entre 0 et 1 ainsi que 30 valeurs de  $p$  variant entre  $0,5 \times p^{(0)}$  et  $1,5 \times p^{(0)}$  sont utilisées pour tracer les courbes de robustesses. Les courbes obtenues sont représentées en « 2-D » sur les figures 4.9a et 4.9b, en « 3-D » sur la figure 4.10. La représentation 2-D permet de bien apprécier le croisement des courbes. La courbe en pointillée est celle associée au paramètre correspondant à l'erreur minimale  $r_c^*$ . Le paramètre est alors  $p^* = 1,13$  et  $r_c^* = 5,07$ . Le zoom de la figure 4.9b montre que le croisement intervient pour des niveaux d'incertitude très faibles. Pour  $\alpha = 0,1$ , c'est-à-dire  $0,95 \leq \mathbf{c} \leq 1,05$ , le modèle performance-optimal est déjà moins robuste qu'un autre modèle. Sur la surface  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{c})$  en fonction de  $r_c$  et  $p$  de la figure 4.10, la courbe en pointillée est toujours la courbe de robustesse du modèle performance-optimal. Avec la courbe en trait continu, on peut suivre l'évolution de

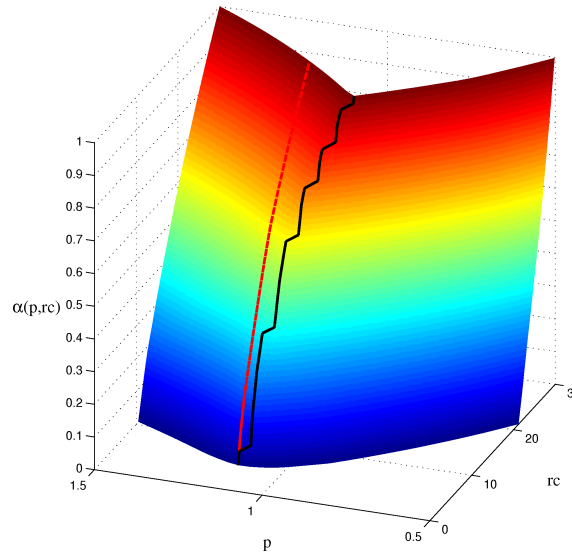
$$\min_{0,5 \leq p \leq 1,5} r_c \quad (4.14)$$

en fonction de  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{c})$ . La non concordance des deux courbes indique que à mesure que la tolérance sur le critère de performance augmente, le modèle optimal-robuste s'éloigne du modèle performance-optimal.



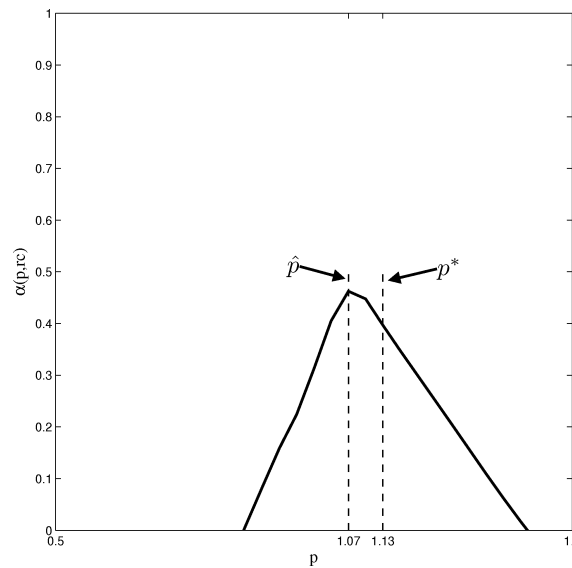
**Fig. 4.9** – (a) Courbes de robustesse en vue 2-D pour différentes valeurs de  $p$ ; (b) zoom sur la vue 2-D

Plaçons nous à  $r_c = 9,1$ , soit une ERAM de 9,1 %, et traçons la robustesse en fonction de  $p$ . Nous obtenons la courbe figure 4.11 calculée par interpolation à partir des données. Nous constatons que le paramètre  $\hat{p} = 1,07$  maximise la robustesse, c'est donc le modèle



**Fig. 4.10** – Courbes de robustesse en vue 3-D pour différentes valeurs de  $p$

optimal-robuste pour  $r_c = 9, 1$ . En  $p = 1, 07$ , la robustesse est  $\hat{\alpha}(1, 07, \mathbf{c})|_{r_c=9,1} = 0, 46$ . Cela signifie qu'un modèle avec  $p = 1, 07$  garantira une performance inférieure à  $r_c = 9, 1$ , et ce, même si  $0, 77 \leq c \leq 1, 23$ . À ce niveau de performance fixé, le modèle performance-optimal  $p^*$  est lui moins robuste. La robustesse est  $\hat{\alpha}(1, 13, \mathbf{c})|_{r_c=9,1} = 0, 4$ .



**Fig. 4.11** –  $\hat{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{c})$  en fonction de  $p$  pour  $r_c = 9, 1$

## 4.4 Conclusions

Dans la première section, nous avons utilisé une approche *info-gap* pour évaluer la robustesse d'une méthode de recalage. Sur les deux exemples étudiés, le recalage basé sur la ERDC apparaît plus robuste que le recalage par sensibilité. Il serait toutefois hasardeux de généraliser à partir de ces deux simulations numériques simples. Il a cependant été mis en évidence que la robustesse du recalage peut varier suivant la méthode utilisée et les para-

mètres recalés.

L'application réalisée dans la deuxième section nous a permis d'établir les conclusions suivantes :

- la performance optimale d'un modèle ne supporte pas les incertitudes. Quel que soit le modèle, la robustesse aux variations des paramètres incertains est nulle pour une valeur de  $r_c$  minimale ;
- les courbes de robustesse peuvent se croiser. Pour une même valeur  $r_c$ , un modèle non-performance-optimal peut être plus robuste que le modèle performance-optimal ;
- il résulte du point précédent que le modèle optimal-robuste peut être différent du modèle performance-optimal.

En pratique, il est donc préférable en présence d'incertitudes, de privilégier un modèle « satisfaisant » à un modèle optimal.

# Conclusions et perspectives

## Conclusions

Dans ce mémoire, nous avons développé différentes méthodes pouvant intervenir dans le processus de conception robuste sous forme d'outils d'aide à la décision. Elles visent principalement à accélérer la vitesse des calculs, à étudier et prendre en compte les effets des incertitudes. Les différents points abordés sont les suivants.

Nos premières contributions concernent la synthèse modale. Les modes propres orthogonaux ont tout d'abord été utilisés pour la sous-structuration dynamique. Cette approche avait déjà été décrite dans la littérature sur des structures simples. Nous proposons ici sur des MEFs de tailles significatives, une façon originale d'obtenir les modes composants. Cette approche s'inscrit seulement dans le cadre de la réanalyse approchée où il est acceptable de faire au moins une analyse modale du système complet de référence. Si les modes exacts complets ne sont pas disponibles, nous proposons d'utiliser les modes obtenus par une méthode de condensation plus classique afin de calculer les POMs. Pour une taille pouvant être beaucoup plus petite, la précision du modèle réduit par les POMs est alors la même que celle de la méthode de réduction classique utilisée. Une méthode hybride utilisant les modes d'attache résiduels et les POMs a aussi été proposée. Son efficacité est bonne mais il nous semble préférable d'utiliser seulement les POMs et d'adapter l'assemblage. Nous avons montré que la réduction par POMs peut être employée pour la réanalyse de modèles basée sur l'adjonction de vecteurs résiduels caractéristiques des modifications paramétriques. L'efficacité est sensiblement la même que pour les méthodes classiques mais cette méthode a l'avantage de fournir un modèle réduit plus petit.

Une méthodologie systématique de vérification et d'optimisation des super-éléments des méthodes de type Craig-Bampton ou Martinez a été proposée. Elle est formulée en trois étapes. La première étape consiste à filtrer les modes composants inutiles dans la bande fréquentielle d'intérêt, en examinant le taux de participation des modes normaux des sous-structures au modes du système complet et les masses modales effectives. La deuxième étape est une localisation des sous-structures mal condensées. Nous utilisons à cet effet une technique habituellement réservée à la localisation d'erreurs de modélisation. Une fois les super-éléments à améliorer identifiés, la dernière étape est une correction par des résidus issus du calcul de localisation. Le modèle réduit est au final prédictif sur la bande fréquentielle d'intérêt, et ce, pour un nombre de ddl minimum. Cette approche nécessite les modes ou au moins la matrice de raideur du système complet et semble davantage appropriée au cas où l'on souhaite déterminer une base pour de la réanalyse approchée.



Concernant la synthèse modale, notre dernière contribution concerne la sélection optimale des coordonnées physiques dans les méthodes de réduction type Guyan ou Craig-Bampton. Pour un nombre de ddls fixés *a priori*, nous montrons qu'un algorithme génétique permet de réaliser cette sélection. Afin d'accélérer la convergence de l'algorithme, nous proposons de se limiter aux ddls de translations internes et de partir d'une population initiale composée des ddls indiqués par une décomposition QR réalisée sur la base modale réduite aux ddls de translations internes.

Nous avons ensuite étudié pour des structures élastodynamiques, la possibilité d'utiliser une formulation probabiliste des problèmes inverses combinant les informations *a priori* sur les paramètres, les modèles d'incertitudes sur les mesures réelles ou simulées et les incertitudes sur le modèle. Cette formulation a été appliquée afin d'obtenir des densités de probabilité *a posteriori* sur les paramètres d'intérêt. L'obtention de ces résultats nécessitent une simulation de Monte Carlo basée sur l'algorithme de Metropolis-Hastings. Les calculs avec la structure exacte étant en général non envisageables, nous avons proposé de les réaliser avec des métamodèles. Pour cela, les surfaces de réponses, les réseaux de neurones et le krigeage ont été testés. Les réseaux ou le krigeage montrant les plus grandes précisions, nous pensons qu'il est préférable d'utiliser ces approches.

Cette formulation probabiliste nous a aussi servi à quantifier l'information susceptible d'être obtenue grâce à des mesures expérimentales. L'étude se base sur l'utilisation des plans d'expérience bayésiens. Il s'agit d'une approche connue mais peu utilisée en dynamique des structures. À l'aide de fonction d'utilité bien choisies, nous avons montré sur deux applications que cette approche permet d'identifier les expériences susceptibles d'augmenter l'information sur les paramètres de modèle d'intérêt.

Dans la dernière partie de ce mémoire, l'approche de modélisation des incertitudes *info-gap* a tout d'abord été employée afin d'évaluer la robustesse aux incertitudes des méthodes de recalage lorsque des paramètres incertains ne sont pas utilisés dans la procédure de recalage. Une comparaison a été réalisée pour le recalage par sensibilité et le recalage basé sur la minimisation de la ERDC. Il est apparu que suivant la méthode utilisée et les paramètres recalés, la robustesse peut varier d'une méthode à l'autre. Bien que pour nos applications le recalage ERDC semble plus robuste, nous nous garderons bien de conclure quant à la supériorité de cette technique par rapport aux autres méthodes de recalage.

La formulation *info-gap* a permis de constater que, dans un environnement incertain et pour un critère de performance donné, il peut être préférable de choisir un modèle « satisfaisant » plutôt qu'un modèle optimal. Cette remarque avait déjà été faite dans d'autres travaux sur des modèles simples disposant d'une solution analytique. Nous l'avons appliquée ici à une structure élastodynamique ne possédant pas de solution analytique.

L'ensemble des outils présentés dans ce mémoire a fait l'objet d'une intégration dans le logiciel AESOP [121], plate-forme logicielle développée sous MATLAB® [136] au Département Mécanique Appliquée de l'institut FEMTO-ST.

## Perspectives

Les travaux exposés dans ce mémoire ne constituent évidemment pas une fin en soi. De nombreux points restent à améliorer et de potentielles investigations s'offrent à nous.

La méthode de construction de la base de POM semble bien adaptée au traitement de système non-linéaires. En effet, partant uniquement de réponses fréquentielles des sous-structures, que ces dernières soient issues de modèles linéaires ou non, le processus de construction de la base de réduction reste le même.

L'inconvénient majeur de l'emploi d'un algorithme génétique lors de la sélection des ddls maîtres optimaux, est le temps de calcul. L'utilisation de métamodèles prédisant correctement la première fréquence propres du système esclave permettrait certainement de réduire significativement ces temps de calcul.

Dans la formulation du problème inverse, l'échantillonnage des densités de probabilité *a posteriori* est réalisé par un algorithme du type Metropolis-Hastings. Il existe cependant dans la littérature bien d'autres algorithmes d'échantillonnage. Il serait intéressant de choisir parmi ceux-ci l'approche optimisant la vitesse de convergence. Dans les applications proposées, les mesures expérimentales ont principalement été simulées et lorsqu'elles étaient disponibles, nous n'avions pas de modèles d'incertitude rigoureux à leur appliquer. La validation de l'approche proposée sur un cas test industriel est un de nos objectifs majeurs.

La même remarque pourrait être faite en ce qui concerne les applications *info-gap* qui, sans rien enlever à l'intérêt de la méthode, se limitent pour l'instant à des cas académiques.

Enfin, puisque que nous avons proposé d'utiliser les modes propres orthogonaux en réanalyse approchée, il pourrait être intéressant lors de la construction des métamodèles, d'utiliser cette approche afin de remplacer une partie des calculs exacts nécessaires aux bases d'apprentissage et de validation.



# Bibliographie

- [1] AHMADIAN H., MOTTERSHEAD J. E. et FRISWELL M. I. – Regularisation methods for finite element model updating. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):47–64, 1998.
- [2] AIT BRIK B. – *Méthodologies de conception robuste et d'optimisation dans un contexte de conception d'architectures mécaniques nouvelles en avant projet*. Thèse, Université de Franche-Comté, Besançon, 2005.
- [3] AIT BRIK B., COGAN S., BOUHADDI N. et HUANG S. J. – Multiobjective optimisation with robustness and uncertainty. In TOPPING B. H. V., éditeur – *Proceedings of the Seventh International Conference on the Application of Artificial Intelligence to Civil and Structural Engineering*, Stirling, UK, 2003. Civil-Comp Press.
- [4] ARNST M. – *Inversion of probabilistic models of structures using measures transfer functions*. Thèse, École Centrale Paris, Paris, 2007.
- [5] AZEEZ M. F. A. et VAKAKIS A. F. – Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations. *Journal of Sound and Vibration*, 240(5):889–889, 2001.
- [6] BAI Z. – Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*, 43(1-2):9–44, 2002.
- [7] BAILLARGEON S. – *Le krigeage : revue de la théorie et application à l'interpolation spatiale de données de précipitations*. Maîtrise, Faculté des études supérieures de l'Université Laval, Laval, Québec, 2005.
- [8] BALMÈS E. – Parametric families of reduced finite element models. Theory and applications. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 10(4):381–394, 1996.
- [9] BALMÈS E. – *Modèles expérimentaux complets et modèles analytiques réduites en dynamique des structures*. Mémoire HDR, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, Paris, 1997.
- [10] BALMÈS E. – Review and evaluation of shape expansion methods. In *Proceedings of IMAC XVIII*, pages 555–561, 2000.
- [11] BALMÈS E., BIANCHI J.-P. et LECLÈRE J.-M. – *Structural Dynamics Toolbox for use with MATLAB*. SDTools, 2007. User's Guide Version 6.0.
- [12] BAMFORD R. M. – A modal combination program for dynamic analysis of structures. Tech. Memo 33-290, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, July 1 1967.
- [13] BAYES T. – An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of the Royal Society*, LIII:376–418, 1763.

- [14] BELEY J. D., BROUDISCOU C., GUILLAUME P., MASMOUDI M. et THEVENON F. – Application de la méthode des dérivées d'ordre élevé à l'optimisation de structures. *Revue européenne des éléments finis*, 5(5-6):537–567, 1996.
- [15] BEN ABDALLAH J. – *Inversion gaussienne appliquée à la correction paramétrique de modèles structuraux*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, Palaiseau, 1995.
- [16] BEN-HAIM Y. – *Information-gap Decision Theory: Decisions Under Severe Uncertainty*. Academic Press, San Diego, 2001.
- [17] BEN-HAIM Y. – *Engineering Design Reliability Handbook*, chapitre Info-gap Decision Theory For Engineering Design. Or : Why 'Good' is preferable to 'Best'. Edited by E. Nikolaides, D. Ghiocel and Surendra Singhal, CRC Press, 2005.
- [18] BEN-HAIM Y., COGAN S. et SANSEIGNE L. – Usability of mathematical models in mechanical decision processes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(1):121–134, 1998.
- [19] BEN-HAIM Y. et ELISHAKOFF I. – *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*. Elsevier Science Publishers, 1990.
- [20] BENFIELD W. A. et HRURDA R. F. – Vibration analysis of structures by component mode substitution. *AIAA Journal*, 9(7):1255–1261, 1971.
- [21] BERTHOD C. – *Identification paramétrique de grandes structures : réanalyse et méthode évolutionnaire*. Thèse, Université de Franche-Comté, Besançon, 1998.
- [22] BOBILLOT A. – *Méthodes de réduction pour le recalage - Application au cas d'Ariane 5*. Thèse de doctorat, École Centrale Paris, Paris, 2002.
- [23] BOUAZIZI M. L., GUEDRI M. et BOUHADDI N. – Robust component modal synthesis method adapted to the survey of the dynamic behaviour of structures with localised non-linearities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20:131–157, 2006.
- [24] BOUAZZOUNI A., LALLEMENT G. et COGAN S. – Selecting a Ritz basis for reanalysis of frequency response functions of modified structures. *Journal of Sound and Vibration*, 199(2):309–322, 1997.
- [25] BOUHADDI N. et FILLOD R. – A method for selecting master DOF in dynamic substructuring using the gyan condensation method. *Computers & Structures*, 45(5-6):941–946, 1992.
- [26] BRAHMI K. – *Double condensation en sous-structuration dynamique*. Thèse, Université de Franche-Comté, Besançon, 1996.
- [27] BREUER H. S. et SIROVICH L. – The use of Karhunen-Loève procedure for calculation of linear eigenfunctions. *Journal of Computational Physics*, 96:277–296, 1991.
- [28] BROOKS S. P. – Quantitative convergence assessment for Markov chain Monte Carlo via cusums. *Statistics and Computing*, 8:267–274, 1998.
- [29] BROYDEN C. G. – The convergence of a class of double-rank minimization algorithms 2 : the new algorithm. *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, 6:222–231, 1970.
- [30] CAMPOLONGO F., CARIBONI J. et SALTELLI A. – An effective screening design for sensitivity analysis of large models. *Environmental Modelling and Software*, 22:1509–1518, 2007.

- 
- [31] CAMPOLONGO F. et SALTELLI A. – Sensitivity analysis of an environmental model : an application analysis methods. *Reliability Engineering and System Safety*, 57(1):49–69, 1997.
- [32] CARO S. – *Conception robuste de mécanismes*. Thèse, École centrale de Nantes, Nantes, 2004.
- [33] CHEN C., DUHAMEL D. et SOIZE C. – Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics : Case of composite sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1-2):64–81, 2006.
- [34] CHEN S. H., YANG X. W. et LIAN H. D. – Comparison of several reanalysis methods for modified structures. *Structural and Multidisciplinary Optimisation*, 20:253–259, 2000.
- [35] CHIAO K. P. – A systematic coupling procedure for component mode synthesis with least squares model reduction. In *Proceedings of IMAC XIV*, pages 579–585, 1996.
- [36] CORUS M. – *Amélioration des méthodes de modification structurale par utilisation de techniques d'expansion et de réduction de modèle*. Thèse, École Centrale Paris, Paris, 2003.
- [37] CRAIG R. R., Jr. – Coupling of substructures for dynamic analyses : an overview. In *42<sup>st</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structure, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, volume 5, pages 3–14, Atlanta, 2000.
- [38] CRAIG R. R., Jr. et BAMPTON M. C. C. – Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319, 1968.
- [39] CRAIG R. R., Jr. et CHANG C.-J. – On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis. In *AIAA/ASME 18<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, pages 89–99, San Diego, 1977. Paper 77-405.
- [40] CRAIG R. R., Jr. et HALE A. L. – Block-Krylov component synthesis method for structural model reduction. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 11(6):562–570, 1988.
- [41] CUKIER R. I., LEVINE H. B. et SHULER K. E. – Nonlinear sensitivity analysis of multi-parameter model systems. *Journal of Computational Physics*, 26:1–42, 1978.
- [42] DAVIDSSON P. – *Structure-acoustic analysis; finite element modelling and reduction methods*. Thèse, Université de Lund, Lund, Suède, 2003.
- [43] DAYAL P. et TROYER M. – The iterative eigenproblem template library. ff, 2002.
- [44] DEMPSTER A. P. – Upper and lower probabilities generated by a random interval. *Annals of Mathematical Statistics*, 39(3):957–966, 1968.
- [45] DERAEMAER A. – *Sur la maîtrise des modèles en dynamique des structures à partir de résultats d'essais*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, 2001.
- [46] DERAEMAER A., LADEVÈZE P. et LE LOCH S. – Results obtained by the CRE updating method using a plate model. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):47–54, 2003.
- [47] DERAEMAER A., LADEVÈZE P. et LECOMTE P. – Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:2427–2444, 2002.
-

- [48] DESSOMBZ O., THOUVEREZ F., LAÎNÉ J. P. et JÉZÉQUEL L. – Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):949–968, 2001.
- [49] DOWNS B. – Accurate reduction of stiffness and mass matrices for vibration analysis and rationale for selecting master degrees of freedom. *Journal of Mechanical Design*, 102, 1980.
- [50] DREYFUS G., MARTINEZ J. M., SAMUELIDES M., GORDON M. B., BADRAN F., THIRIA S. et HÉRAULT L. – *Réseaux de neurones : méthodologie et applications*. Eyrolles, 2004.
- [51] DUBOIS D. et PRADÉ H. – Possibilistic logic : a retrospective and prospective view. *Fuzzy sets and Systems*, 144(1):3–23, 2004.
- [52] DYN N., LEVIN D. et RIPPA S. – Numerical procedures for surface fitting of scattered data by radial basis functions. *SIAM Journal of Scientific and Statistical Computing*, 7 (2):639–659, 1986.
- [53] EFRON B. et TIBSHIRANI R. J. – *An introduction to the Bootstrap*, volume 57 de *Mono-graphs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1993.
- [54] FEENY B. F. et KAPPAGANTU R. – On the physical interpretation of proper orthogonal modes in vibrations. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4):607–616, 1998.
- [55] FISCHER R. – Bayesian experimental design - Studies for fusion diagnostics. *AIP conference proceedings*, 735:76–83, 2004.
- [56] FISSETTE E., IBRAHIM S. et STAVRINIDIS C. – Error location and updating of analytical dynamic models using a force balance method. *In Proceedings of IMAC VI*, pages 1063–1070, 1998.
- [57] FONSECA J. R., FRISWELL M. I., MOTTERSHEAD J. E. et LEES A. W. – Uncertainty identification by the maximum likelihood method. *Journal of Sound and Vibration*, 288 (3):587–599, 2005.
- [58] FORESEE F. D. et HAGAN M. T. – Gauss-newton approximation to bayesian regularization. *In Proceedings of the 1997 International Joint Conference on Neural Networks*, pages 1930–1935, 1997.
- [59] FRIEDMAN J. H. – Multivariate Adaptive Regression Spline. *The Annals of Statistics*, 19(1):1–141, 1991.
- [60] GELMAN A., CARLIN J., STEIN H. et RUMBIN D. – *Bayesian data analysis*. Chapman, New York, 1995.
- [61] GHANEM R. G. et SPANOS P. D. – *Stochastic Finite Elements : a Spectral Approach*. Springer, 1991.
- [62] GLADWELL G. M. L. – Branch mode analysis of vibrating systems. *Journal of Sound and Vibrations*, 1:41–59, 1964.
- [63] GOLDMAN R. L. – Vibration analysis by dynamic partitioning. *AIAA Journal*, 7(6):1152–1154, 1969.
- [64] GOLUB G. H. et KAHAN W. – Calculating the singular values and pseudo-inverse of a matrix. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 2, pages 205–224, 1965.
- [65] GOLUB G. H. et VAN LOAN C. F. – *Matrix Computations*. The John Hopkins University Press, London, 1993.

- 
- [66] GUEDRI M. – *Synthèse modale/approches stochastiques en élastodynamique linéaire et non-linéaire*. Thèse, Faculté des sciences de Tunis de l'université El Manar, Nabeul, Tunisie, 2006.
- [67] GUYAN R. J. – Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 3(2):380, 1965.
- [68] GÉRADIN M. et RIXEN D. – *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures*. Masson, Paris, 2007.
- [69] HANSTEEN O. E. et BELL K. – On the accuracy of mode superposition analysis in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 7(5):405–411, 1979.
- [70] HARDY R. L. – Multiquadratic equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of Geophysical Ressources*, 76:1905–1915, 1971.
- [71] HEMEZ F. M. et BEN-HAIM Y. – Info-gap robustness for the correlation of tests and simulations of a nonlinear transient. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 18(6):1443–1467, 2004.
- [72] HENSHELL K. D. et ONG J. H. – Automatic masters for eigenvalue economization. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 3(4):375–383, 1975.
- [73] HINTZ R. M. – Analytical methods in component modal synthesis. *AIAA Journal*, 13(8):1007–1016, 1975.
- [74] HOLMES P., LUMLEY J. L. et BERKOOZ G. – *Turbulence, Coherent Structure, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge, New York, 1996.
- [75] HOMMA T. et SALTELLI A. – Importance measures in global sensitivity analysis of non-linear models. *Reliability Engineering and System Safety*, 52:1–17, 1996.
- [76] HORNIK K., STINCHCOMBE M. et WHITE H. – Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Networks*, 2:359–366, 1989.
- [77] HOTELLING H. – Analysis of a complex statistical variables into principal components. *Journal of Educational Psychology*, 24:1785–1795, 417-441 et 498-520.
- [78] HOU S. N. – Review of modal synthesis techniques and a new approach. *The Shock and Vibration Bulletin*, 7(40):25–39, 1969.
- [79] HUANG M. L. et HUNG Y. H. – Combining radial basis function neural network and genetic algorithm to improve HDD driver IC chip scale package assembly yield. *Expert Systems with Applications*, 34:588–595, 2008.
- [80] HURTY B. M. – Structural eigenvalue problems : elimination of unwanted variables. *AIAA Journal*, 3:961–962, 1965.
- [81] HURTY W. C. – Dynamic analysis of structural systems using component modes. *AIAA Journal*, 3(4):678–685, 1965.
- [82] IMAN R. L. et CONOVER W. J. – Small sample sensitivity analysis techniques for computer models, with an application to risk assessment. *Communications in Statistics*, A9(17):1749–1842, 1980.
- [83] JACQUES J., LAVERGNE C. et DEVICTOR N. – Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs. *Reliability Engineering and System Safety*, 91:1126–1134, 2006.
-



- [84] JIN R., CHEN W. et SIMPSON T. W. – Comparative studies of metamodeling techniques under multiple modelling criteria. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23: 1–13, 2001.
- [85] KAMMER D. C. et TRILLER M. J. – Selection of component modes for Craig-Bampton substructure representations. *Journal of Vibration and Acoustics*, 118(2):264–270, 1996.
- [86] KAPPAGANTU R. et FEENY B. F. – An optimal modal reduction of a system with frictional excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 224(5):863–877, 1999.
- [87] KARHUNEN K. – Über lineare methoden in der wahrscheinlichkeitsrechnung. *Annals of Academic Science Fennicae*, 37, 1946.
- [88] KATAFYGIOTIS L. S., PAPADIMITRIOU C. et LAM H. F. – A probabilistic approach to structural model updating. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 17(7):495–507, 1998.
- [89] KAYMAZ I. – Application of kriging method to structural reliability problems. *Structural Safety*, 27:133–151, 2005.
- [90] KERSCHEN G. – *On the Model Validation in Non-linear Structural Dynamics*. Thèse, Université de Liège, Liège, 2002.
- [91] KERSCHEN G., FEENY B. F. et GOLINVAL J. C. – On the exploitation of chaos to build reduced-order models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (13-14):1785–1795, 2003.
- [92] KERSCHEN G. et GOLINVAL J. C. – Physical interpretation of the proper orthogonal modes using the singular value decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 249 (5):849–965, 2002.
- [93] KEYS A. C., REES L. P. et GREENWOOD A. G. – Performance measures for selection of metamodels to be used in simulation optimization. *Decision Sciences*, 33(1):31–57, 2002.
- [94] KIM T. – Frequency-domain Karhunen-Loève method and its application to linear dynamic systems. *AIAA Journal*, 36(11):1681–1688, 1998.
- [95] KIM T. – Component mode synthesis method based on optimal modal analysis. In *42<sup>st</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structure, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, Denver, 2001. AIAA-2002-1226.
- [96] KIM T. – An efficient response-based modal analysis for dynamic systems with multiple inputs. In *42<sup>st</sup> AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structure, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*, Seattle, 2001. AIAA-2001-1380.
- [97] KIRSCH U. – Design-oriented analysis of structures - Unified approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 129(3):264–272, 2003.
- [98] KIRSCH U. – A unified reanalysis approach for structural analysis, design, and optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimisation*, 25:67–85, 2003.
- [99] KIRSCH U. – Combined approximations - a general reanalysis approach for structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimisation*, 20:97–106, 2000.
- [100] KLIR G. – Generalized information theory : aims, results, and open problems. *Reliability Engineering and Systems Safety*, 85(1-3):21–38, 2004.

- 
- [101] KNIGHT F. H. – *Risk, Uncertainty and Profit*. 1921. URL <http://www.econlib.org/LIBRARY/Knight/knRUP.html>.
- [102] KOHONEN T. – *Self-Organizing Maps*, volume 30 de *Series in Information Sciences*. Springer, 3 édition, 2001.
- [103] KOSAMBI D. – Statistics in function space. *Journal of Indian Mathematical Society*, 7:76–88, 1943.
- [104] KULLBACK S. – The two concept of information. *Journal of American Statistical Association*, 62:685–686, 1967.
- [105] LADEVÈZE P. et LEGUILLON D. – Error estimate procedure in the finite element method and application. *SAIM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):485–509, 1983.
- [106] LADEVÈZE P., PUEL G. et ROMEUF T. – Lack of knowledge in structural model validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(37-40):4697–4710, 2006.
- [107] LADEVÈZE P., REYNIER M. et MAIA N. – *Inverse Problems in Engineering*, chapitre Error on the constitutive relation in dynamics, pages 251–256. Bui H. D., Tanaka M., *et al* (Eds), Balkema, Rotterdam, 1994.
- [108] LALANNE M. et FERRARIS G. – *Rotordynamics Prediction in Engineering*. John Wiley & Sons, 1990.
- [109] LALLEMENT G. et PIRANDA J. – Localisation methods for parameter updating of finite element models in elastodynamics. *In Proceedings of IMAC VIII*, pages 579–585, 1990.
- [110] LALLEMENT G., RAMANITRANJA A. N. et COGAN S. – Optimal sensor deployment : applications to model updating problems. *Journal of Vibration and Control*, 4(1):29–46, 1998.
- [111] LANCZOS C. – An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 45:255–282, 1950.
- [112] LAPACK – URL <http://www.netlib.org/lapack/>.
- [113] LENAERTS V., KERSCHEN G. et GOLINVAL J. C. – Proper orthogonal decomposition for model updating of non-linear mechanical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(1):31–43, 2001.
- [114] LEVENBERG K. – A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly Journal of Applied Mathematics*, 2:164–168, 1944.
- [115] LEVY R. et GUYAN R. J. – Reduction solutions recycled for improved accuracy. *In NASTRAN Users Experiences*, pages 202–220. NASA TM X-2378, 1971.
- [116] LIANG Y. C., LEE H. P., LIM S. P., LIN W. Z., LEE K. H. et WU C. G. – Proper orthogonal decomposition and its applications – Part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 252(3):527–544, 2002.
- [117] LIEVEN N. A. J. et EWINS D. J. – Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC). *In Proceedings of IMAC VI*, pages 690–695, 1998.
- [118] LINDLEY D. V. – On a measure of information provided by an experiment. *Annales of Mathematical Statistic*, 27:986–1005, 1956.
-

- [119] LIU H., CHEN W. et SUDJANTO A. – Probabilistic sensitivity analysis methods for design under uncertainty. In *AIAA-2004-4589, 10<sup>th</sup> AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, Albany, New York, 2004.
- [120] LIU H., CHEN W. et SUDJANTO A. – Relative entropy based method for global and regional sensitivity analysis in probalistic design. *ASME Journal of Mechanical Design*, 128(2):326–336, 2006.
- [121] *AESOP user guide*. LMARC-Université de Franche-Comté, Besançon.
- [122] LOMBARD J. P. – *Contribution à la réduction des modèles éléments finis par synthèse modale*. Thèse, Université de Franche-Comté, Besançon, 1999.
- [123] LOPHAVEN S. R., NIELSEN H. B. et SONDERGAARD J. – A Matlab Kriging Toolbox, 2002. URL <http://www.imm.dtu.dk/~hbn/dace/>. Technical University of Denmark.
- [124] LOÈVE M. – Fonctions aléatoires du second ordre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, pages 220–469, 1945.
- [125] MACKAY D. J. C. – Bayesian interpolation. *Neural Computation*, 4(3):415–447, 1992.
- [126] MACKAY D. J. C. – *Information Theory, Inference and Learning Algorithms*. Cambridge University Press, London, 2003.
- [127] MACNEAL R. H. – A hybrid method of component mode synthesis. *Computers & Structures*, 1(4):581–601, 1971.
- [128] MARCIANO J. P. – Plans d'expériences bayesiens en économétrie. *Revue de statistique appliquée*, 19(4):45–71, 1971.
- [129] MARES C., FRISWELL M. I. et MOTTERSHEAD J. E. – Model updating using robust estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16(1):169–183, 2002.
- [130] MARES C., MOTTERSHEAD J. E. et FRISWELL M. I. – Stochastic model updating : Part 1-theory and simulated example. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(7):1674–1695, 2006.
- [131] MARTINEZ D. R., CARNE T. G., GREGORY D. L. et MILLER A. K. – Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis. In *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, pages 140–152, Palm Springs, 1984. AIAA Paper 8-0941.
- [132] MASSA F. – *Gestion des imperfections en phase de conception des structures mécaniques*. Thèse, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Valenciennes, 2005.
- [133] MASSON G. – *Synthèse modale robuste adaptée à l'optimisation de modèles de grande taille*. Thèse, Université de Franche-Comté, Besançon, 2003.
- [134] MASSON G., AIT BRIK B., COGAN S. et BOUHADDI N. – Component mode synthesis (CMS) based on an enriched Ritz approach for efficient structural optimization. *Journal of Sound and Vibrations*, 296(4-5):845–860, 2006.
- [135] MATHERON G. – Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58:1246–1266, 1963.
- [136] MATHWORKS – Matlab 7.1. URL <http://www.mathworks.com>.
- [137] MCCULLAGH P. et NELDER J. A. – *Generalized Linear Models*. Chapman & Hall, London, 1989.

- 
- [138] MCCULLOCH W. et PITTS W. – A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5:115–133, 1943.
- [139] MCKAY M. D. – Evaluating prediction uncertainty. Technical Report NUREG/CR-6311, US Nuclear Regulatory Commission and Los Alamos National Laboratory, 1995.
- [140] MCKAY M. D., BECKMAN R. J. et CONOVER W. J. – A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. *Technometrics*, 21(2):239–245, 1979.
- [141] METROPOLIS N., ROSENBLUTH A. W., ROSENBLUTH M. N., TELLER A. H. et TELLER E. – Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 1(6):1087–1092, 1953.
- [142] MICHALEWICZ Z. – *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolutionary Algorithms*. Springer-Verlag, 1994.
- [143] MICHOT S. – *Contributions à la validation de modèles en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 2003.
- [144] MOODY J. et DARKEN C. – Fast learning in networks of locally-tuned processing units. *Neural Computation*, 1:281–294, 1989.
- [145] MOORE R. M. – *Interval Analysis*. Prentice-Hall, 1966.
- [146] MORRIS M. D. – Factorial sampling plans for preliminary computational experiments. *Technometrics*, 33:161–174, 1991.
- [147] MOSEGAARD K. – Resolution analysis of general inverse problems through inverse Monte Carlo sampling. *Inverse Problems*, 14:405–426, 1998.
- [148] MOSEGAARD K. et TARANTOLA A. – *International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology (part A)*, chapitre Probabilistic Approach to Inverse Problems. Academic Press, 2002.
- [149] MOTTERSHEAD J. E. et FRISWELL M. I. – Model updating in structural dynamics : a survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2):347–375, 1993.
- [150] MOTTERSHEAD J. E., MARES C. et FRISWELL M. I. – Stochastic model updating : Part 2-application to a set of physical structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(8):2171–2185, 2006.
- [151] MYERS R. H. et MONTGOMERY D. C. – *Response Surface Methodology*. Wiley, New York, 2002.
- [152] NEWMAN A. J. – Modal reduction via Karhunen-Loève expansion ; Part II : Some elementary examples. Technical Report T.R. 96-33, Institute for Systems Research, 1996.
- [153] NGUYEN D. et WIDROW B. – Improving the learning speed of 2-layer neural networks by choosing initial values of adaptive weights. *In Proceedings of the IJCNN*, volume 3, pages 21–26, 1990.
- [154] OBERKAMPF W. L., DELAND S. M., RUTHERFORD B. M., DIEGERT K. V. et ALVIN K. F. – Error and uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering and System Safety*, 75(3):333–357, 2002.
- [155] OBUKHOV M. A. – Statistical description of continuous fields. *Trudy Geofizicheskogo Instituta, Akademiya Nauk SSSR*, 24:3–42, 1954.
-

- [156] PANDEY A. K., BISWAS M. et SAMMAN M. M. – Damage detection from changes in curvature mode shapes. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):321–332, 1991.
- [157] PAPADIMITRIOU C., BECK J. L. et KATAFYGIOTIS L. S. – Updating robust reliability using structural test data. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(2):103–113, 2001.
- [158] PARIZEAU M. – Réseaux de neurones, 2006. Notes de cours.
- [159] PARKS J. M. – On stochastic optimization : Taguchi methods demystified ; its limitations and fallacy clarified. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(1):87–101, 2001.
- [160] PARRENIN F. – *Datation glaciologique des forages profonds en Antarctique et modélisation conceptuelle des paléoclimats : implications pour la théorie astronomique des paléoclimats*. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2002.
- [161] PASCUAL R. – *Model based structural damage assessment using vibration measurements*. Thèse de doctorat, Université de Liège, Liège, Belgique, 1999.
- [162] PASCUAL R., GOLINVAL J. C. et RAZETO M. – On the reability of error localization indicators. *In Proceedings of ISMA 23*, pages 1119–1127, Leuven, Belgium, 1998.
- [163] POPPLEWELL N., BERTELS A. W. M. et ARYA B. – A critical appraisal of the elimination technique. *Journal of Sound and Vibration*, 31(2):213–233, 1973.
- [164] POUGACHEV V. S. – General theory of the correlations of random functions. *Izvestiya, Akademiya Nauk SSSR*, 17:1401–1402, 1953.
- [165] PUEL G. – *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse, École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, 2004.
- [166] RAMANITRANJA A. N. et LALLEMENT G. – Choix optimal des degrés de liberté maîtres de la condensation de guyan. application à l'identification paramétrique. *Mécanique Industrielle et Matériaux, Revue du G.A.M.I.*, 49(2):95–97, 1996.
- [167] RAMSDEN J. N. et STOKER J. R. – Mass condensation : a semi automatic method for reducing the size of vibrations problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1(4):333–349, 1969.
- [168] ROBERT C. P. et CASELLA G. – *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, New York, 2004.
- [169] RONG F., CHEN S. H. et CHEN Y. D. – Structural modal reanalysis for topological modifications with extended kirsch method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(5-6):697–707, 2003.
- [170] RUBIN S. – Improved component-mode representation for structural dynamic analysis. *AIAA Journal*, 13(8):995–1006, 1975.
- [171] SACKS J., SCHILLER S. B. et WELCH W. J. – Design for computer experiments. *Technometrics*, 31(1):41–47, 1989.
- [172] SALTELLI A. – Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. *Computer Physics Communications*, 145:280–297, 2002.
- [173] SALTELLI A., CHAN K. et SCOTT M. – *Sensitivity Analysis*. Probability and Statistics Series. John Wiley & Sons, 2000.
- [174] SALTELLI A., RATTO M., TARANTOLA S. et CAMPOLONGO F. – Sensitivity analysis practices : (s)trategies for model-based inference. *Reliability Engineering and System Safety*, 91(10-11):1109–1125, 2006.

- 
- [175] SALTELLI A. et SOBOLOV I. M. – About the use of rank transformation in sensitivity analysis of model output. *Reliability Engineering and System Safety*, 50:225–239, 1995.
- [176] SALTELLI A., TARANTOLA S. et CHAN K. – A quantitative model-independent method for global sensitivity analysis of model output. *Technometrics*, 41(1):39–56, 1999.
- [177] SCALES J. A. et SNIEDER R. – The anatomy of inverse problems. *Geophysics*, 65(6):1708–1710, 2000.
- [178] SCHAIBLY J. H. et SHULER K. E. – Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. II applications. *Journal of Chemical Physics*, 59:3879–3888, 1973.
- [179] SCHEIDT C. – *Analyse statistique d'expérience simulées : Modélisation adaptative de réponses non-régulières par krigeage et plans d'expérience*. Thèse, Université Louis Pasteur de Strasbourg, Strasbourg, 2006.
- [180] SCHUELLER G. I. – A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4):197–321, 1997.
- [181] SCHUELLER G. I. – Computational stochastic mechanics - recent advances. *Computers & Structures*, 79(22-25):2225–2234, 2001.
- [182] SEDEGHATI R., SOUCY Y. et ETIENNE N. – Efficient estimation of effective mass for complex structures under base excitations. *Canadian Aeronautics and Space Journal*, 49(3):135–143, 2003.
- [183] SHAFER G. – *A Mathematical Theory of Evidence*. Princeton University Press, 1976.
- [184] SHAH V. N. et RAYMUND M. – Analytical selection of masters for the reduced eigenvalue problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18(1):89–98, 1982.
- [185] SHANNON C. E. – A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 1948.
- [186] SIMON H. A. – *Reason in Human Affairs*. Stanford University Press, Stanford, 1983.
- [187] SIMPSON T. W., PEPLINSKY J. D., KOCH P. N. et ALLEN J. K. – Metamodels for computer-based engineering design : survey and recommendations. *Engineering with Computers*, 17:129–150, 2001.
- [188] SIROVICH L. – Turbulence and the dynamics of coherent structures ; Part i : Coherent structure. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3):561–571, 1987.
- [189] SOBOLOV I. M. – Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiments*, 1:407–414, 1993.
- [190] SOIZE C. – A nonparametric model of random uncertainties on reduced matrix model in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294, 2000.
- [191] SOIZE C. – A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3):623–652, 2005.
- [192] SOTERIS K. A. – Optimization of solar systems using artificial neural networks and genetic algorithms. *Applied Energy*, 77(4):383–405, 2004.
-

- [193] STEENACKERS G. et GUILLAUME P. – Finite element model updating taking into account the uncertainty on the modal parameters estimates. *Journal of Sound and Vibration*, 296(4-5):919–934, 2006.
- [194] STRANLUND J. K. et BEN-HAIM Y. – Price-based vs. quantity-based environmental regulation under knightian uncertainty : An info-gap robust satisficing perspective. *Journal of Environmental Management*, 2007. à paraître.
- [195] TAKEWAKI I. et BEN-HAIM Y. – Info-gap robust design with load and model uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3):551–570, 2005.
- [196] TARANTOLA A. – *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. SIAM, Philadelphia, 2005.
- [197] TARANTOLA A. – Popper, bayes and the inverse problem. *Nature Physics*, 2:492–494, 2006.
- [198] TORGO L. F. R. A. – *Inductive Learning of Tree-based Regression Models*. Thèse de doctorat, Université de Porto, 1999.
- [199] van den BERG J., CURTIS A. et TRAMPERT J. – Optimal nonlinear Bayesian experimental design : an application to amplitude versus offset experiments. *Geophysical Journal International*, 8:411–421, 2003.
- [200] VAPNIK V. N. – *Statistical Learning Theory*. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [201] VERDINELLI K. et VERDINELLI I. – Bayesian experimental design : A review. *Statistical Science*, 10:273–304, 1995.
- [202] VINOT P. – *Contributions à la validation de modèles en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté, Besançon, 2001.
- [203] VINOT P., COGAN S. et CIPOLLA V. – A robust model-based test planning procedure. *Journal of Sound and Vibration*, 288(3):571–585, 2005.
- [204] VINOT P., COGAN S. et LALLEMENT G. – Approche non-probabiliste de fiabilité basée sur les modèles convexes. *Mécanique & Industries*, 4:45–50, 2003.
- [205] WATERS T. P. – A modified force balance method for locating errors in dynamic finite element models. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(2):309–317, 1998.
- [206] WRIGHT G. C. et MILES G. A. – An economical method for determining the smallest eigenvalues of large linear systems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 3:25–33, 1971.
- [207] WU C. G., LIANG Y. C., LIN W. Z., LEE H. P. et LIM S. P. – A note on equivalence of proper orthogonal decomposition methods. *Journal of Sound and Vibration*, 265(5):1103–1110, 2003.
- [208] YAP K. C. et ZIMMERMAN D. C. – A comparative study of structural dynamic modification and sensitivity method approximation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16(4):585–597, 2002.
- [209] YU B. et MYKLAND P. – Looking at Markov samplers through Cusum path plots : a simple diagnostic idea. *Statistics and Computing*, 8:275–286, 1998.
- [210] ZADEH L. A. – Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [211] ZADEH L. A. – Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and Systems*, 1:3–28, 1978.

- [212] ZANG C., FRISWELL M. I. et MOTTERSHEAD J. E. – A review of robust optimal design and its application in dynamics. *Computers & Structures*, 83(4-5):315–326, 2005.
- [213] ZHANG Q. et LALLEMENT G. – Dominant error localisation in a finite element model of a mechanical structure. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1(2):141–149, 1987.
- [214] ZHANG Y., CHEN S., LIU Q. et LIU T. – Stochastic perturbation finite elements. *Computers & Structures*, 59(3):425–429, 1996.





# Listes des publications

## Revues internationales avec comité de lecture

- [215] DUPONT B., PILLET E. et COGAN S. – Superelement verification in complex structural models. *Shock and Vibration*, 15(3-4):369–381, 2008.
- [216] PILLET E., BOUHADDI N. et COGAN S. – Bayesian experimental design and parametric identification in modal analysis. *Computers & Structures*, 2008. Soumis.
- [217] PILLET E., COGAN S. et BOUHADDI N. – Predicting test informativeness in structural dynamics. *International Journal of Design and Innovation Research*, 2008. À paraître.

## Conférences internationales avec actes et comité de lecture

- [218] DUPONT B., PILLET E. et COGAN S. – Superelement verification in complex structural models. *In International Conference on Engineering Dynamics*, Carvoeiro, Portugal, 16-18 avril 2007.
- [219] PILLET E., BOUHADDI N. et COGAN S. – Bayesian experimental design for parametric identification of dynamical structures. *In* TOPPING B. H. V., MONTERO G. et MONTENEGRO R., éditeurs – *Proceedings of the Eighth International Conference on Computational Structures Technology*, Las Palmas, Canaries, 2006. Civil-Comp Press. paper 45.
- [220] PILLET E., BOUHADDI N. et COGAN S. – Information gain quantification in structural dynamic. *In 12<sup>th</sup> IFToMM World Congress*, Besançon, 18-21 juin 2007.

## Conférences nationales avec actes et comité de lecture

- [221] AIT BRIK B., PILLET E. et BOUHADDI N. – Sélection optimale des coordonnées physiques dans les méthodes de synthèse modale. *In XV<sup>e</sup> colloque Vibrations Chocs et Bruits*, Écully, 14-16 juin 2006.
- [222] GUEDRI M., PILLET E., BOUHADDI N. et MAJED R. – Synthèse modale de modèles stochastiques. *In XIV<sup>e</sup> colloque Vibrations Chocs et Bruits*, Écully, 16-17 juin 2004.
- [223] PILLET E., BOUHADDI N. et COGAN S. – Transformation de Karhunen-Loève en synthèse modale par condensation dynamique robuste. *In XIV<sup>e</sup> colloque Vibrations Chocs et Bruits*, Écully, 16-17 juin 2004.

- [224] PILLET E., BOUHADDI N. et COGAN S. – Préparation optimale d'essais dynamiques par une approche de conception robuste. *In 2<sup>e</sup> Congrès Conception et Modélisation des Systèmes*, Monastir, Tunisie, 19-21 mars 2007.
- [225] PILLET E., BOUHADDI N. et COGAN S. – Qualité des essais en dynamique des structures. *In 7<sup>e</sup> Congrès international pluridisciplinaire*, Tanger, Maroc, 20-22 mars 2007.
- [226] PILLET E., COGAN S. et BOUHADDI N. – Identification des paramètres de conception à partir de mesures incertaines. *In Proceedings du 7<sup>e</sup> Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 17-20 mai 2005. Hermes-Science.
- [227] PILLET E., COGAN S. et BOUHADDI N. – Évaluation de la robustesse des méthodes de recalage par approche *info-gap*. *In XV<sup>e</sup> colloque Vibrations Chocs et Bruits*, Écully, 14-16 juin 2006.

# Annexes

## A Critères de comparaison des modèles

Les différents critères de comparaison utilisés dans ce mémoire ont les définitions suivantes.

L'erreur relative en pour cent associée à la fréquence propre  $\epsilon_f$  est définie par

$$\epsilon_f = 100 \times \frac{|f^{\text{ref}} - f^{\text{cal}}|}{f^{\text{ref}}}, \quad (15)$$

avec  $f^{\text{cal}}$  la fréquence propre calculée et  $f^{\text{ref}}$  la fréquence propre de référence.

L'erreur relative en pour cent associée au vecteur propre  $\epsilon_y$  est définie par

$$\epsilon_y = 100 \times \frac{\|\mathbf{y}^{\text{ref}} - \text{msf} \times \mathbf{y}^{\text{cal}}\|}{\|\mathbf{y}^{\text{ref}}\|}, \quad (16)$$

avec  $\mathbf{y}^{\text{cal}}$  le vecteur propre calculé et  $\mathbf{y}^{\text{ref}}$  le vecteur propre de référence. msf est le *modal scale factor* qui est utilisé lorsque les modes comparés ne sont pas à la même échelle. Ce coefficient minimisant l'erreur relative est calculé selon

$$\text{msf} = \frac{\mathbf{y}^{\text{ref}^T} \mathbf{y}^{\text{cal}}}{\mathbf{y}^{\text{cal}^T} \mathbf{y}^{\text{cal}}}.$$

Il est préférable de calculer les deux critères précédents pour des modes appariés. En effet, deux fréquences propres très proches peuvent correspondre à des modes de différentes natures. Pour s'assurer de la corrélation entre deux vecteurs propres, un des critères les plus employés est le *Modal Assurance Criterion* (MAC). Il est donné par

$$\text{MAC}_y = \frac{\|\mathbf{y}^{\text{ref}^T} \mathbf{y}^{\text{cal}}\|^2}{\|\mathbf{y}^{\text{ref}^T} \mathbf{y}^{\text{ref}}\| \|\mathbf{y}^{\text{cal}^T} \mathbf{y}^{\text{cal}}\|}. \quad (17)$$

Les modes sont considérés comme identiques si  $\text{MAC}_y = 1$ . Les modes sont considérés comme appariés à partir d'une certaine valeur, par exemple 0,7.

Pour  $n_s$  échantillons, soient  $y^{(i)}$  la réponse du MEF à l'échantillon ( $i$ ),  $\hat{y}^{(i)}$  la réponse

correspondante du métamodèle et  $\bar{y}$  la moyenne des  $y^{(i)}$ , alors :

- le critère  $R^2$  est défini selon

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_s} (y^{(i)} - \hat{y}^{(i)})^2}{\sum_{i=1}^{n_s} (y^{(i)} - \bar{y})^2}.$$

Plus  $R^2$  est proche de 1, plus le métamodèle est prédictif;

- l'erreur relative absolue moyenne ERAM est définie en pour cent selon

$$\text{ERAM} = 100 \times \frac{1}{n_s} \frac{\sum_{i=1}^{n_s} |y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}|}{|y^{(i)}|}.$$

Plus ERAM est proche de 0, plus le métamodèle est prédictif;

- le maximum de l'erreur relative absolue MERA est défini en pour cent selon

$$\text{MERA} = 100 \times \max \left( \frac{|y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}|}{|y^{(i)}|} \right).$$

Plus MERA est proche de 0, plus le métamodèle est prédictif. Lorsque les critères  $R^2$  et ERAM sont bons, une mauvaise valeur de MERA indique que localement le métamodèle est moins précis.

## B Apprentissage neural et régularisation bayésienne

### B.1 Notations

Nous présentons dans cette annexe les principes de l'apprentissage d'un réseau de neurones par rétropropagation du gradient et régularisation bayésienne. Avant d'aller plus loin précisons ou rappelons que :

- l'indice  $[k]$  désigne la couche  $k$  du réseau parmi les  $N_c$  couches du réseau qui incluent la couche d'entrée et la couche de sortie ;
- l'indice  $(l)$  désigne un échantillon de la base d'apprentissage parmi les  $n_s$  calculés ;
- une couche  $k$  comporte  $n_{ck}$  neurones ;
- un neurone  $j$  d'une couche  $k$  est relié à une entrée  $i$  par un poids  $w_{ji}^{[k]}$  et produit une sortie  $s_j^{[k]}$  à travers une fonction d'activation  $f^{[k]}$  ;
- l'ensemble des sorties  $s_j^{[k]}$  de la couche  $k$  constituent le vecteur  $\mathbf{s}^{[k]} = [s_1^{[k]} \dots s_{n_{ck}}^{[k]}]^T$  ;
- chaque neurone  $j$  d'une couche  $k$  est relié aux  $n_{c,k-1}$  entrées associées aux sorties de la couche précédente constituant le vecteur  $\mathbf{s}^{[k-1]}$  ;
- les poids  $w_{ji}^{[k]}$  d'un neurone  $j$  sont regroupés dans le vecteur  $\mathbf{w}_j^{[k]} = [w_{j1}^{[k]} \dots w_{jn_{c,k-1}}^{[k]}]^T$  et le biais associé est noté  $b_j^{[k]}$  ;
- pour une couche  $k$ , les  $n_{ck}$  vecteurs  $\mathbf{w}_j^{[k]}$  constituent la matrice  $\mathbf{W}^{[k]} = [\mathbf{w}_1^{[k]} \dots \mathbf{w}_{n_{ck}}^{[k]}]$  et les  $n_{ck}$  biais  $b_j^{[k]}$  constituent le vecteur  $\mathbf{b}^{[k]} = [b_1^{[k]} \dots b_{n_{ck}}^{[k]}]^T$  ;
- l'ensemble des poids et biais du réseau sont regroupés dans le vecteur  $\mathbf{p}$  contenant  $N_p$  paramètres ;
- pour une couche  $k$ , les  $n_{ck}$  potentiels  $v_j^{[k]} = b_j^{[k]} + \left( \mathbf{w}_j^{[k]} \right)^T \mathbf{s}^{[k-1]}$  constituent le vecteur

$$\mathbf{v}^{[k]} = \begin{bmatrix} v_1^{[k]} & \dots & v_{n_c k}^{[k]} \end{bmatrix}^T.$$

Avec ces notations, l'équation décrivant les sorties d'une couche  $k$  s'écrit

$$\mathbf{s}^{[k]} = f^{[k]}(\mathbf{v}^{[k]}) = f^{[k]}(\mathbf{b}^{[k]} + \mathbf{W}^{[k]} \mathbf{s}^{[k-1]}) \quad \text{pour } k = 1, \dots, N_c, \quad (18)$$

avec  $N_c$  le nombre de couches. Pour un échantillon  $i$  pris parmi  $n_s$  disponibles, on notera que  $\mathbf{s}^{[0]} = \mathbf{x}^{(i)}$  et que la sortie du réseau est  $\mathbf{s}^{[N_c]} = \hat{\mathbf{y}}^{(i)}$ .

## B.2 L'algorithme de Levenberg-Marquardt

L'objectif de l'apprentissage neural consiste en général à trouver le vecteur  $\mathbf{p}$  minimisant l'erreur quadratique moyenne ou la somme des erreurs quadratiques

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^{n_s} \left( \boldsymbol{\epsilon}^{(l)} \right)^T \boldsymbol{\epsilon}^{(l)} = \sum_{l=1}^{n_s} \sum_{m=1}^{n_c N_c} \left( \epsilon_m^{(l)} \right)^2 = \sum_{q=1}^N r_q(\mathbf{p})^2 = \mathbf{r}(\mathbf{p})^T \mathbf{r}(\mathbf{p}) = \text{SSE}, \quad (19)$$

avec l'erreur  $\boldsymbol{\epsilon}^{(l)} = \mathbf{y}^{(l)} - \mathbf{s}^{[N_c]} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(l)} & \dots & \epsilon_{n_c N_c}^{(l)} \end{bmatrix}^T$

et  $\mathbf{r}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} r_1(\mathbf{p}) & \dots & r_N(\mathbf{p}) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{(1)} & \dots & \epsilon_{n_c N_c}^{(1)} & \dots & \epsilon_1^{(n_s)} & \dots & \epsilon_{n_c N_c}^{(n_s)} \end{bmatrix}^T$  où  $N = n_s \times n_c N_c$ .

La minimisation de  $F(\mathbf{p})$  est réalisée à l'aide d'une méthode d'optimisation dérivée de la descente du gradient, c'est-à-dire que le déplacement se fait dans la direction de la plus forte pente. Nous utilisons ici la méthode quasi-Newton de Levenberg-Marquardt [114]. Au lieu de modifier les paramètres à l'itération  $k$  selon le calcul exact

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}(k) - \Delta^2 F(\mathbf{p}(k))^{-1} \Delta F(\mathbf{p}(k)), \quad (20)$$

la modification sera effectuée avec une matrice hessienne  $\Delta^2 F(\mathbf{p}(k))$  approximée. Remarquons auparavant que

$$\begin{aligned} \Delta F(\mathbf{p}(k)) &= 2 \sum_{q=1}^N r_q(\mathbf{p}(k)) \Delta r_q(\mathbf{p}(k)) = 2 \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{r}(\mathbf{p}(k)) \quad \text{et} \\ \Delta^2 F(\mathbf{p}(k)) &= 2 \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{J}(\mathbf{p}(k)) + 2 \sum_{q=1}^N r_q(\mathbf{p}(k)) \Delta^2 r_q(\mathbf{p}(k)). \end{aligned} \quad (21)$$

$\mathbf{J}(\mathbf{p}(k))$  est la matrice jacobienne de  $\mathbf{r}(\mathbf{p}(k))$ . Elle s'écrit

$$\mathbf{J}(\mathbf{p}(k)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon_1^{(1)}}{\partial w_{11}^{[1]}} & \dots & \frac{\partial \epsilon_1^{(1)}}{\partial w_{n_{N_c} n_{N_c-1}}^{[N_c]}} & \frac{\partial \epsilon_1^{(1)}}{\partial b_1^{[1]}} & \dots & \frac{\partial \epsilon_1^{(1)}}{\partial b_{N_c}^{[N_c]}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \epsilon_{n_{N_c}}^{(1)}}{\partial w_{11}^{[1]}} & \dots & \frac{\partial \epsilon_{n_{N_c}}^{(1)}}{\partial w_{n_{N_c} n_{N_c-1}}^{[N_c]}} & \frac{\partial \epsilon_{n_{N_c}}^{(1)}}{\partial b_1^{[1]}} & \dots & \frac{\partial \epsilon_{n_{N_c}}^{(1)}}{\partial b_{N_c}^{[N_c]}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \epsilon_1^{(n_s)}}{\partial w_{11}^{[1]}} & \dots & \frac{\partial \epsilon_1^{(n_s)}}{\partial w_{n_{N_c} n_{N_c-1}}^{[N_c]}} & \frac{\partial \epsilon_1^{(n_s)}}{\partial b_1^{[1]}} & \dots & \frac{\partial \epsilon_1^{(n_s)}}{\partial b_{N_c}^{[N_c]}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \epsilon_{n_{N_c}}^{(n_s)}}{\partial w_{11}^{[1]}} & \dots & \frac{\partial \epsilon_{n_{N_c}}^{(n_s)}}{\partial w_{n_{N_c} n_{N_c-1}}^{[N_c]}} & \frac{\partial \epsilon_{n_{N_c}}^{(n_s)}}{\partial b_1^{[1]}} & \dots & \frac{\partial \epsilon_{n_{N_c}}^{(n_s)}}{\partial b_{N_c}^{[N_c]}} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Le terme  $2 \sum_{q=1}^N r_q(\mathbf{p}(k)) \Delta^2 r_q(\mathbf{p}(k))$  étant faible vis-à-vis de  $2 \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))$ , la hessienne sera approchée par

$$2 \mathbf{H}(\mathbf{p}(k)) = \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{J}(\mathbf{p}(k)). \quad (23)$$

L'équation (20) devient alors

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(k+1) &= \mathbf{p}(k) - \left( 2 \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{J}(\mathbf{p}(k)) \right)^{-1} 2 \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{r}(\mathbf{p}(k)) \\ &= \mathbf{p}(k) - \left( \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{J}(\mathbf{p}(k)) \right)^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{r}(\mathbf{p}(k)). \end{aligned} \quad (24)$$

La matrice  $\mathbf{H}(\mathbf{p}(k)) = \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))$  pouvant être singulière, elle est remplacée par

$$\mathbf{G}(\mathbf{p}(k)) = \mathbf{H}(\mathbf{p}(k)) + \mu(k) \mathbf{I}, \quad (25)$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice identité et  $\mu(k) > 0$  un facteur d'amortissement positif ajusté à chaque nouvelle itération. L'équation (24) s'écrit finalement

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}(k) - \left( \mathbf{H}(\mathbf{p}(k)) + \mu(k) \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{r}(\mathbf{p}(k)). \quad (26)$$

À chaque itération,  $F(\mathbf{p})$  est calculée avec un  $\mu(k)$  petit afin d'accélérer la convergence. Si  $F(\mathbf{p})$  n'est pas diminuée, on recommence en augmentant  $\mu(k)$  – en général d'un facteur 10 – jusqu'à ce que  $F(\mathbf{p})$  décroisse. Lorsque  $F(\mathbf{p})$  décroît, on passe à l'itération suivante en diminuant  $\mu(k)$  par un facteur 10. Ces calculs nécessitent l'évaluation des termes de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}(\mathbf{p}(k))$ . Ceci fera l'objet du dernier paragraphe de cette annexe.

### B.3 La régularisation bayésienne

Nous abordons désormais la formulation de la régularisation bayésienne[58, 126]. Dans le but d'obtenir un réseau généralisant bien, c'est-à-dire que le réseau est performant pour des entrées autres que celles de la base d'apprentissage, un terme de régularisation est ajouté dans la fonction coût. La minimisation vise alors

$$F(\mathbf{p}) = \beta \text{SSE} + \alpha \text{SSP}, \quad (27)$$

avec  $SSP = \mathbf{p}^T \mathbf{p}$  la somme des carrés des poids et biais du réseau, et  $\alpha$  et  $\beta$  les paramètres de régularisation. On cherche à ajuster ces paramètres de sorte à ce que l'évolution des sorties du réseau soit la plus lisse possible. C'est le cas lorsque les poids sont maintenus petits.

L'application du théorème de Bayes pour l'apprentissage des réseaux de neurones a été proposé par MacKay [125]. Si  $\mathbf{Y}$  représente l'ensemble des réponses et NN l'architecture courante du réseau de neurones, la règle de Bayes s'écrit

$$P(\mathbf{p}|\mathbf{Y}, \alpha, \beta, NN) = \frac{P(\mathbf{p}|\alpha, NN) P(\mathbf{Y}|\mathbf{p}, \beta, NN)}{P(\mathbf{Y}|\alpha, \beta, NN)}. \quad (28)$$

$P(\mathbf{p}|\alpha, NN)$  est la densité de probabilité *a priori* sur les paramètres du réseau,  $P(\mathbf{Y}|\mathbf{p}, \beta, NN)$  est la fonction de vraisemblance et  $P(\mathbf{Y}|\alpha, \beta, NN)$  est une constante de normalisation. Si nous considérons que le bruit sur les réponses de la base d'apprentissage est un bruit gaussien d'écart type  $\sqrt{1/(2\beta)}$  et la densité *a priori* sur les paramètres du réseau est gaussien d'écart type  $\sqrt{1/(2\alpha)}$  alors

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y}|\mathbf{p}, \beta, NN) &= \frac{1}{Z_Y(\beta)} \exp(-\beta SSE) \quad \text{et} \\ P(\mathbf{p}|\alpha, NN) &= \frac{1}{Z_p(\alpha)} \exp(-\alpha SSP), \end{aligned} \quad (29)$$

avec  $Z_Y(\beta) = (\pi/\beta)^{N_c/2}$  et  $Z_p(\alpha) = (\pi/\alpha)^{N_p/2}$ .

En substituant ces expressions dans l'équation (28), nous obtenons

$$P(\mathbf{p}|\mathbf{Y}, \alpha, \beta, NN) = \frac{1}{Z_F(\alpha, \beta)} \exp(-F(\mathbf{p})). \quad (30)$$

Les paramètres de régularisation optimaux sont ceux maximisant l'information *a posteriori* sur les paramètres  $\mathbf{p}$ . On cherche donc à maximiser  $P(\mathbf{p}|\mathbf{Y}, \alpha, \beta, NN)$  ce qui revient à minimiser  $F(\mathbf{p})$ .

Appliquons désormais le théorème de Bayes afin d'exprimer la densité de probabilité *a posteriori* sur  $\alpha$  et  $\beta$ . Nous avons

$$P(\alpha, \beta|\mathbf{Y}, NN) = \frac{P(\alpha, \beta|NN) P(\mathbf{Y}|\alpha, \beta, NN)}{P(\mathbf{Y}|NN)}. \quad (31)$$

La densité *a priori*  $P(\alpha, \beta|NN)$  est considérée uniforme. La maximisation de  $P(\alpha, \beta|\mathbf{Y}, NN)$  est donc réalisée en maximisant  $P(\mathbf{Y}|\alpha, \beta, NN)$ . Des équations (28) et (29) nous obtenons

$$\begin{aligned} P(\mathbf{Y}|\alpha, \beta, NN) &= \frac{P(\mathbf{p}|\alpha, NN) P(\mathbf{Y}|\mathbf{p}, \beta, NN)}{P(\mathbf{p}|\mathbf{Y}, \alpha, \beta, NN)} \\ &= \frac{\frac{1}{Z_p(\alpha)} \exp(-\alpha SSP) \frac{1}{Z_Y(\beta)} \exp(-\beta SSE)}{\frac{1}{Z_F(\alpha, \beta)} \exp(-F(\mathbf{p}))} \\ &= \frac{Z_F(\alpha, \beta)}{Z_Y(\beta) Z_p(\alpha)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Dans cette expression, la constante  $Z_F(\alpha, \beta)$  est inconnue. Pour déterminer cette fonction, nous développons  $F(\mathbf{p})$  en série de Taylor au voisinage d'un minimum de la fonction noté



$\mathbf{p}^*$ . Puisqu'en ce point le gradient de la fonction coût est nul, nous avons

$$F(\mathbf{p}) \approx F(\mathbf{p}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)^T \Delta^2 F(\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*}. \quad (33)$$

$Z_F(\alpha, \beta)$  est une constante de normalisation, donc

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{p}|\mathbf{Y}, \alpha, \beta, NN) d\mathbf{p} &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{Z_F(\alpha, \beta)} \exp(-F(\mathbf{p})) d\mathbf{p} &= 1 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-F(\mathbf{p}^*) - \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)^T \Delta^2 F(\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*}\right) d\mathbf{p} &= Z_F(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (34)$$

L'intégration de cette dernière expression permet d'obtenir

$$Z_F(\alpha, \beta) = (2\pi)^{N_p/2} \left( \det\left((\Delta^2 F(\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*})^{-1}\right) \right)^{1/2} \exp(-F(\mathbf{p}^*)). \quad (35)$$

Les valeurs optimales de  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminées en introduisant ce résultat dans l'équation (32) puis en dérivant le logarithme de l'équation (32) par rapport à chacune des variables. En égalisant ses quantités à zéro nous obtenons

$$\alpha^* = \frac{\gamma}{2SSP(\mathbf{p}^*)} \quad \text{et} \quad \beta^* = \frac{N_c - \gamma}{2SSE(\mathbf{p}^*)}, \quad (36)$$

avec  $\gamma = N_p - 2\alpha^* \text{tr}(\Delta^2 F(\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*})^{-1}$ .  $\gamma$  est le nombre effectif de paramètres. Ce paramètre indique combien de paramètres sont mis en jeu pour minimiser la fonction coût. Si à la fin de l'apprentissage  $\gamma$  est proche de  $N_p$ , cela signifie que le nombre de poids et biais n'est peut être pas assez élevé pour obtenir de bons résultats. On envisagera alors de rajouter des neurones à l'architecture. Si  $\gamma$  est éloigné de  $N_p$ , on pourra envisager le contraire. Ce paramètre permet de déterminer en quelques ajustements, la taille optimale du réseau.

Avec ce type de régularisation, il n'est pas nécessaire d'utiliser une base de validation durant l'apprentissage. Même si la généralisation est en principe garantie, il conviendra tout de même de tester le réseau ainsi construit sur une base test.

Il est nécessaire d'évaluer la matrice hessienne au point  $\mathbf{p}^*$ . Pour cela, l'approximation de l'algorithme de Levenberg-Marquardt est utilisée. Dans le cas de la régularisation bayésienne l'équation (26) est modifiée. Elle devient

$$\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}(k) - (\beta(k) \mathbf{H}(\mathbf{p}(k)) + (\mu(k) + \alpha(k))\mathbf{I})^{-1} (\mathbf{J}(\mathbf{p}(k))^T \mathbf{r}(\mathbf{p}(k)) + \mathbf{p}(k)). \quad (37)$$

## B.4 Algorithme d'apprentissage neural par régularisation bayésienne

Pour résumer les différentes phases de cette apprentissage sont les suivantes :

1. Initialiser  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\mathbf{p}$  [153].
2. Appliquer l'algorithme de Levenberg-Marquardt à la minimisation de  $F(\mathbf{p}) = \beta SSE + \alpha SSP$  jusqu'à ce que  $F(\mathbf{p})$  soit diminuée. Lorsque c'est le cas, calculer  $\mathbf{p}(k+1)$  selon l'équation (37) et considérer que  $\mathbf{p}(k+1) = \mathbf{p}^*$ .
3. Calculer  $\gamma = N_p - 2\alpha^* \text{tr}(\Delta^2 F(\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=\mathbf{p}^*})^{-1}$ .

4. Calculer  $\alpha$  et  $\beta$  selon les équations (36).
5. Réitérer les étapes 2 à 4 jusqu'à la convergence de  $\gamma$ , SSE et SSP.

## B.5 Calculs des dérivées partielles

Pour finir, nous présentons la méthode utilisée pour calculer les termes de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}(\mathbf{p})$ . Ces gradients partiels sont calculés dans une phase de dite de rétropropagation. Avant cela, dans une phase de propagation, pour chaque couple entrée-sortie  $(\mathbf{x}^{(l)}, \mathbf{y}^{(l)})$  de la base d'apprentissage, les entrées  $\mathbf{x}^{(l)}$  sont propagées vers l'avant à travers les  $N_c$  couches du réseau en calculant les sorties

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{[0],(l)} &= \mathbf{x}^{(l)} \\ \mathbf{s}^{[k],(l)} &= f^{[k]} \left( \mathbf{b}^{[k]} + \mathbf{W}^{[k]} \mathbf{s}^{[k-1],(l)} \right) \quad \text{pour } k = 1, \dots, N_c. \end{aligned} \quad (38)$$

Pour un élément quelconque  $\epsilon_m^{(l)}$  de  $\mathbf{r}(\mathbf{p})$  avec  $m = 1, \dots, n_{cN_c}$  et  $l = 1, \dots, n_s$ , par rapport au poids d'un neurone  $j$  connecté à une entrée  $i$  d'une couche  $[k]$  et au biais de ce neurone, les dérivées peuvent être décomposées selon

$$\frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial w_{ji}^{[k]}} = \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial v_j^{[k],(l)}} \times \frac{\partial v_j^{[k],(l)}}{\partial w_{ji}^{[k]}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial b_j^{[k]}} = \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial v_j^{[k],(l)}} \times \frac{\partial v_j^{[k],(l)}}{\partial b_j^{[k]}}. \quad (39)$$

Comme  $v_j^{[k],(l)} = b_j^{[k]} + \left( \mathbf{w}_j^{[k]} \right)^T \mathbf{s}^{[k-1],(l)} = b_j^{[k]} + \sum_{i=1}^{n_{ck}} w_{ji}^{[k]} s_i^{[k-1],(l)}$ , il vient

$$\frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial w_{ji}^{[k]}} = \delta_j^{[k],(l)} s_i^{[k-1],(l)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial b_j^{[k]}} = \delta_j^{[k],(l)}, \quad (40)$$

avec la sensibilité  $\delta_j^{[k],(l)} = \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial v_j^{[k],(l)}}$ . Toutes les sensibilités de la couche  $[k]$  sont regroupées dans

$$\boldsymbol{\delta}^{[k],(l)} = \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial \mathbf{v}^{[k],(l)}} = \left[ \delta_1^{[k],(l)} \dots \delta_{n_{ck}}^{[k],(l)} \right]^T. \quad (41)$$

Les sorties  $s_i^{[k-1],(l)}$  ayant été déterminées lors de la propagation, il reste seulement à calculer les sensibilités. Pour cela, il nécessaire de réaliser de nouveau des dérivées composées. Nous commençons par calculer les sensibilités de la dernière couche  $[N_c]$ , la couche des sorties. Nous avons

$$\delta_j^{[N_c],(l)} = \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial v_j^{[N_c],(l)}} = \frac{\partial \left( y_m^{(l)} - s_m^{[N_c],(l)} \right)}{\partial v_j^{[N_c],(l)}} = - \frac{\partial s_m^{[N_c],(l)}}{\partial v_j^{[N_c],(l)}}, \quad (42)$$

avec

$$\delta_j^{[N_c],(l)} = \begin{cases} -f^{[N_c]} \left( v_j^{[N_c],(l)} \right) & \text{pour } j = m \\ 0 & \text{pour } j \neq m \end{cases}. \quad (43)$$

Soit sous notation matricielle

$$\boldsymbol{\delta}^{[N_c],(l)} = -\dot{\mathbf{F}}^{[N_c]} \left( \mathbf{v}^{[N_c],(l)} \right), \quad (44)$$

avec

$$\dot{\mathbf{F}}^{[N_c]} \left( \mathbf{v}^{[N_c],(l)} \right) = \begin{bmatrix} \dot{f}^{[N_c]} \left( v_1^{[N_c],(l)} \right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dot{f}^{[N_c]} \left( v_2^{[N_c],(l)} \right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dot{f}^{[N_c],(l)} \left( v_{n_{N_c}}^{[N_c]} \right) \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Les dérivés des fonctions d'activation  $f^{[k]}$  étant connues analytiquement, il n'y a pas de problèmes pour calculer cette matrice.

Pour déterminer les sensibilités des couches inférieures, nous avons besoin de la matrice

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{[k+1]}}{\partial \mathbf{v}^{[k]}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1^{[k+1]}}{\partial v_1^{[k]}} & \frac{\partial v_1^{[k+1]}}{\partial v_2^{[k]}} & \dots & \frac{\partial v_1^{[k+1]}}{\partial v_{n_{ck}}^{[k]}} \\ \frac{\partial v_2^{[k+1]}}{\partial v_1^{[k]}} & \frac{\partial v_2^{[k+1]}}{\partial v_2^{[k]}} & \dots & \frac{\partial v_2^{[k+1]}}{\partial v_{n_{ck}}^{[k]}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_{n_{ck+1}}^{[k+1]}}{\partial v_1^{[k]}} & \frac{\partial v_{n_{ck+1}}^{[k+1]}}{\partial v_2^{[k]}} & \dots & \frac{\partial v_{n_{ck+1}}^{[k+1]}}{\partial v_{n_{ck}}^{[k]}} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

On y retrouve toutes les sensibilités des niveaux d'activation d'une couche par rapport à ceux de la couche précédente. Les éléments de cette matrice peuvent être explicités selon

$$\frac{\partial v_i^{[k+1]}}{\partial v_j^{[k]}} = \frac{\partial \left( b_i^{[k+1]} + \left( \mathbf{w}_i^{[k+1]} \right)^T \mathbf{s}^{[k]} \right)}{\partial v_j^{[k]}}. \quad (47)$$

Or, puisque seul  $s_j^{[k]}$  dépend de  $v_j^{[k]}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^{[k+1]}}{\partial v_j^{[k]}} &= w_{ij}^{[k+1]} \frac{\partial s_j^{[k]}}{\partial v_j^{[k]}} \\ &= w_{ij}^{[k+1]} \frac{\partial f^{[k]} \left( v_j^{[k]} \right)}{\partial v_j^{[k]}} = w_{ij}^{[k+1]} \dot{f}^{[k]} \left( v_j^{[k]} \right). \end{aligned} \quad (48)$$

La matrice  $\frac{\partial \mathbf{v}^{[k+1]}}{\partial \mathbf{v}^{[k]}}$  peut donc s'écrire

$$\frac{\partial \mathbf{v}^{[k+1]}}{\partial \mathbf{v}^{[k]}} = \mathbf{W}^{[k+1]} \dot{\mathbf{F}}^{[k]} \left( \mathbf{v}^{[k]} \right). \quad (49)$$

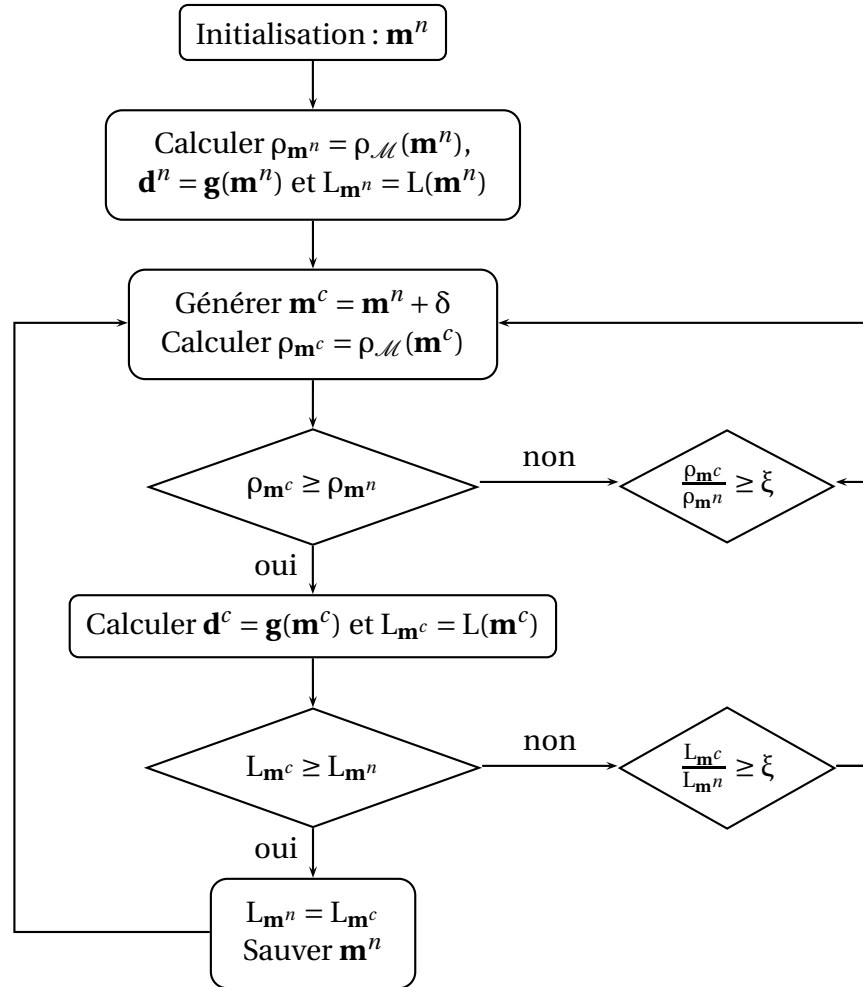
En tenant compte de ceci pour un échantillon  $(l)$ , le calcul des sensibilités des couches

inférieures se fait itérativement jusqu'à la couche la plus basse selon

$$\delta^{[k],(l)} = \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial \mathbf{v}^{[k],(l)}} = \left( \frac{\partial \mathbf{v}^{[k+1],(l)}}{\partial \mathbf{v}^{[k],(l)}} \right)^T \times \frac{\partial \epsilon_m^{(l)}}{\partial \mathbf{v}^{[k+1],(l)}} = \dot{\mathbf{F}}^{[k]} \left( \mathbf{v}^{[k],(l)} \right) \left( \mathbf{w}^{[k+1]} \right)^T \delta^{[k+1],(l)}. \quad (50)$$

## C Échantillonnage de Monte Carlo

Nous présentons ici l'algorithme de Metropolis-Hastings évoqué paragraphe 3.2.2. Précisons que  $\delta$  est un pas aléatoire et  $\xi$  est un nombre aléatoire compris entre 0 et 1. L'organigramme est



## D Méthodologies de recalage

Rappelons que nous travaillons avec un MEF à  $N$  ddl et des mesures expérimentales effectuées en  $c$  points de la structure que le modèle représente.  $\mathbf{y}_v$  est le  $v^e$  vecteur propre du MEF et  ${}_c\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  est le  $v^e$  vecteur propre obtenu à partir des données expérimentales.  $\lambda_v$  et  $\lambda_v^{\text{exp}}$

sont les valeurs propres associées.  $\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  est le vecteur étendu des observations expérimentales afin de pouvoir confronter les résultats expérimentaux à ceux du MEF.  $\mathbf{y}_v$  et  $\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  peuvent ne pas être appariés. Afin de trouver l'apparié de  $\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$ , le critère du MAC (17) sera utilisé. S'il existe, le mode apparié à  $\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  sera noté  $\mathbf{y}_v^{\text{app}}$  de valeur propre  $\lambda_v^{\text{app}}$ .

Afin de s'affranchir des problèmes de dimension, nous travaillons avec des coefficients multiplicatifs des paramètres d'intérêt. Nous notons  $\mathbf{p} = [p_1 \cdots p_{n_p}]^T$  le vecteur des  $n_p$  paramètres à recalcr (en fait les coefficients) et  $m$  le nombre de solutions propres mesurées.

## D.1 Recalage par sensibilité

Le recalage par sensibilité est une procédure itérative reposant sur le calcul des sensibilités des solutions propres rapport aux paramètres à recalcr. Ainsi, les distances entre les solutions propres mesurées et celles calculées sont développées en série de Taylor selon

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_v &= \lambda_v^{\text{exp}} - \lambda_v^{\text{app}} = \sum_{k=1}^{n_p} \frac{\partial \lambda_v^{\text{app}}}{\partial p_k} \Delta p_k + \sum_{k=1}^{n_p} O(\Delta p_k^2) \quad \text{et} \\ \Delta\mathbf{y}_v &= \mathbf{y}_v^{\text{exp}} - \mathbf{y}_v^{\text{app}} = \sum_{k=1}^{n_p} \frac{\partial \mathbf{y}_v^{\text{app}}}{\partial p_k} \Delta p_k + \sum_{k=1}^{n_p} O(\Delta p_k^2). \end{aligned} \quad (51)$$

De ces distances, seront calculées une matrice de sensibilité qui servira à estimer les corrections à apporter aux paramètres.

La convergence de l'algorithme est gouvernée par l'évolution d'une fonction coût rendant compte de la minimisation de l'écart entre les données expérimentales et les données calculées. Par exemple, nous pouvons utiliser la fonction coût

$$F(\mathbf{p}) = \sum_{v=1}^m w_{\lambda_v} |\epsilon_{\lambda_v}| + \sum_{v=1}^m w_{\mathbf{y}_v} |\epsilon_{\mathbf{y}_v}|, \quad (52)$$

où  $\epsilon_{\lambda_v}$  et  $\epsilon_{\mathbf{y}_v}$  sont définies selon les équations (15) et (16). Les  $w^{\lambda_v}$  et  $w^{\mathbf{y}_v}$  sont d'éventuels coefficients de pondération.

L'algorithme de recalage par sensibilité peut être le suivant :

1. par rapport à chaque paramètre  $p_k$ , calculer les sensibilités des valeurs et vecteurs propres selon

$$\frac{\partial \lambda_v}{\partial p_k} = \mathbf{y}_v^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_k} - \lambda_v \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_k} \right) \mathbf{y}_v \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{y}_v}{\partial p_k} = \sum_{\sigma=1}^m c_v^\sigma \mathbf{y}_\sigma, \quad (53)$$

avec

$$\begin{cases} c_v^\sigma = \frac{\frac{\partial \lambda_v}{\partial p_k}}{\lambda_v - \lambda_\sigma} & \text{si } \sigma \neq v, \\ c_v^v = -\frac{1}{2} \mathbf{y}_v^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_k} \mathbf{y}_v & \text{si } \sigma = v. \end{cases}$$

Les sensibilités de matrices de raideur et de masse sont calculées par différences finies.

2. réaliser l'appariage entre les vecteurs propres du modèle courant et les vecteurs de référence afin d'associer aux solutions propres ( $\lambda_v^{\text{exp}}, \mathbf{y}_v^{\text{exp}}$ ) les solutions propres homologues calculées ( $\lambda_v^{\text{app}}, \mathbf{y}_v^{\text{app}}$ ). Seuls les  $m_a$  modes expérimentaux ayant un apparié sont

considérés. Calculer

$$\Delta\lambda_v = \frac{\lambda_v^{\text{app}} - \lambda_v^{\text{exp}}}{\lambda_v^{\text{exp}}} \quad \text{et} \quad \Delta\mathbf{y}_v = \frac{\mathbf{y}_v^{\text{app}} - \text{msf} \times \mathbf{y}_v^{\text{exp}}}{\|\mathbf{y}_v^{\text{exp}}\|}. \quad (54)$$

Les dérivées sont normalisées pour obtenir les indices

$$S_{\lambda_v, p_k} = \frac{1}{\lambda_v^{\text{exp}}} \times \frac{\partial \lambda_v}{\partial p_k} \quad \text{et} \quad S_{\mathbf{y}_v, p_k} = \frac{1}{\|\mathbf{y}_v^{\text{exp}}\|} \times \frac{\partial \mathbf{y}_v}{\partial p_k} \quad (55)$$

qui permettent d'obtenir la relation de sensibilité

$$\begin{bmatrix} S_{\lambda_1, p_1} & \cdots & S_{\lambda_1, p_{n_p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{\lambda_{m_a}, p_1} & \cdots & S_{\lambda_{m_a}, p_{n_p}} \\ S_{\mathbf{y}_1, p_1} & \cdots & S_{\mathbf{y}_1, p_{n_p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{\mathbf{y}_{m_a}, p_1} & \cdots & S_{\mathbf{y}_{m_a}, p_{n_p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \vdots \\ \Delta p_{n_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\lambda_v \\ \vdots \\ \Delta\lambda_{m_a} \\ \Delta\mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \Delta\mathbf{y}_{m_a} \end{bmatrix} \quad (56)$$

notée  $\mathbf{S} \Delta \mathbf{p} = \Delta \mathbf{b}$ ;

3. minimiser le système linéaire contraint

$$\min_{\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}} \|\mathbf{S} \Delta \mathbf{p} - \Delta \mathbf{b}\|. \quad (57)$$

Ce système peut être résolu avec un algorithme de minimisation sous contraintes. Nous obtenons  $\Delta \mathbf{p}$  et actualisons à l'itération  $i$  le paramètre selon  $\mathbf{p}^{(i+1)} = \mathbf{p}^{(i)} + \Delta \mathbf{p}$ ;

4. si les critères d'arrêt basés sur l'évolution de la fonction coût sont satisfaits ou que la procédure semble diverger, terminer. Sinon, revenir à l'étape 1).

## D.2 Recalage basé sur l'erreur en relation de comportement

### Formulation

Nous présentons ici le recalage basé sur l'erreur en relation de comportement [105]. Dans toutes les méthodologies employant l'ERDC, les équations d'intérêt sont divisées en un groupe d'équations fiables – les équations d'équilibre – et un groupe d'équations moins fiables – les relations de comportement. La solution au problème posé doit alors satisfaire les équations fiables tout en minimisant l'erreur sur les équations moins fiables, l'ERDC. Le recalage basé sur l'ERDC [45, 47, 107] fait aussi la distinction entre les quantités fiables – les fréquences mesurées, la position et direction des capteurs et excitateurs – et les quantités moins fiables – les amplitudes des forces et déplacements aux points d'excitation ou les amplitudes des déplacements aux points de mesure  $c\mathbf{y}_v^{\text{exp}}$ . Une erreur sur les mesures est donc construite pour prendre en compte les incertitudes sur les quantités non fiables. Cette erreur ajoutée à l'ERDC forme l'ERDC modifiée. Bien que le problème puisse être posé sous forme continue, seule la formulation discrète du problème sera présentée ici.

L'ERDC modifiée pour le mode  $v$  s'exprime selon [47]

$$e_v^{\text{ERDC}m} = e_v^{\text{ERDC}} + \frac{r}{1-r} \left\| \mathbf{L} \mathbf{u}_v - {}_c \mathbf{y}_v^{\text{exp}} \right\|^2. \quad (58)$$

$e_v^{\text{ERDC}m}$  est l'ERDC et le deuxième terme représente l'erreur sur les mesures. Dans cette dernière expression,  $\mathbf{u}_v$  est un champ de déplacement admissible à déterminer,  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{c,N}$  est une matrice de transformation permettant la projection de  $\mathbf{u}_v$  sur les ddls observés et  $r$  est un scalaire positif permettant d'assigner une confiance plus ou moins grande dans les mesures. Les mesures sont considérées très fiables si  $r$  est proche de 1 et très peu fiables si  $r$  est proche de 0.  $r$  est communément fixé à 0,5.

La méthode peut être appliquée à des systèmes dissipatifs excités ou non dont le MEF contient des erreurs en masse, raideur et amortissement [47]. Nous nous restreindrons aux systèmes conservatifs libres dont les équations d'équilibre sont régies par

$$(\mathbf{K} - \omega_v^2 \mathbf{M}) \mathbf{y}_v = 0. \quad (59)$$

Dans ce cas, l'équation (58) se développe selon

$$\begin{aligned} e_v^{\text{ERDC}m} = & \frac{\gamma}{2} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v)^T \mathbf{K} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v) + \frac{1-\gamma}{2} (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v)^T \omega_v^2 \mathbf{M} (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v) \\ & + \frac{r}{1-r} (\mathbf{L} \mathbf{u}_v - {}_c \mathbf{y}_v^{\text{exp}})^T \mathbf{G}^r (\mathbf{L} \mathbf{u}_v - {}_c \mathbf{y}_v^{\text{exp}}). \end{aligned} \quad (60)$$

La matrice  $\mathbf{G}^r$  sert à pondérer l'erreur et peut être prise égale à  $\frac{\gamma}{2} \mathbf{K}^r + \frac{1-\gamma}{2} \mathbf{M}^r$ , où  $\mathbf{K}^r$  et  $\mathbf{M}^r$  sont les réductions de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  aux ddls mesurés. Les matrices de Guyan (1.34) sont en pratique souvent utilisées. Le coefficient  $\gamma$  permet d'ajuster le type d'erreur de modélisation. Ainsi, si  $\gamma = 0,5$ , on considère que l'erreur de modélisation est constituée à 50 % d'erreur en masse et à 50 % d'erreur en raideur.  $\mathbf{v}_v$  et  $\mathbf{w}_v$  sont deux autres champs admissibles devant satisfaire l'équation d'équilibre

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_v - \omega_v^2 \mathbf{M} \mathbf{w}_v = 0. \quad (61)$$

Les champs de déplacements inconnus  $\mathbf{u}_v$ ,  $\mathbf{v}_v$  et  $\mathbf{w}_v$  sont déterminés en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{\mathbf{u}_v, \mathbf{v}_v, \mathbf{w}_v} e^{\text{ERDC}m} \\ \text{avec } \mathbf{K} \mathbf{v}_v - \omega_v^2 \mathbf{M} \mathbf{w}_v = 0. \end{array} \right. \quad (62)$$

En introduisant un vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  de multiplicateurs de Lagrange, le problème revient à minimiser la fonction

$$\begin{aligned} g = & \frac{\gamma}{2} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v)^T \mathbf{K} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v) + \frac{1-\gamma}{2} (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v)^T \omega_v^2 \mathbf{M} (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v) \\ & + \frac{r}{1-r} (\mathbf{L} \mathbf{u}_v - {}_c \mathbf{y}_v^{\text{exp}})^T \mathbf{G}^r (\mathbf{L} \mathbf{u}_v - {}_c \mathbf{y}_v^{\text{exp}}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K} \mathbf{v}_v - \omega_v^2 \mathbf{M} \mathbf{w}_v). \end{aligned} \quad (63)$$

Ensuite, nous dérivons  $g$  par rapport à  $\mathbf{u}_v$ ,  $\mathbf{v}_v$ ,  $\mathbf{w}_v$  et  $\boldsymbol{\lambda}$  et nous obtenons les équations

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}_v} = 0 \Rightarrow \gamma \mathbf{K} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v) + (1 - \gamma) \omega_v^2 \mathbf{M} (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v) + \frac{2r}{1-r} \mathbf{L}^T \mathbf{G}^r (\mathbf{L} \mathbf{u}_v - \mathbf{c} \mathbf{y}_v^{\text{exp}}) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}_v} = 0 \Rightarrow -\gamma \mathbf{K} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v) + \mathbf{K} \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \mathbf{w}_v} = 0 \Rightarrow -(1 - \gamma) \omega_v^2 \mathbf{M} (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v) - \omega_v^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\lambda} = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{v}_v - \omega_v^2 \mathbf{M} \mathbf{w}_v = 0 \Leftrightarrow \mathbf{K} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v) - \omega_v^2 \mathbf{M} (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v) - \mathbf{Z}_v \mathbf{u}_v = 0 \end{cases} \quad (64)$$

À condition que  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{M}$  soient inversibles, nous tirons de la troisième équation que  $\boldsymbol{\lambda} = -(1 - \gamma) (\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v)$  et de la deuxième que

$$\mathbf{u}_v - \mathbf{w}_v = -\frac{\gamma}{1 - \gamma} (\mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v). \quad (65)$$

Finalement, en introduisant ces relations dans la première et la quatrième équation du système (64), le problème revient à résoudre le système

$$\begin{bmatrix} \gamma (\mathbf{K} - \omega_v^2 \mathbf{M}) & \frac{2r}{1-r} \mathbf{L}^T \mathbf{G}^r \mathbf{L} \\ \mathbf{K} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \omega_v^2 \mathbf{M} & -\mathbf{Z}_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v \\ \mathbf{u}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2r}{1-r} \mathbf{L}^T \mathbf{G}^r \mathbf{c} \mathbf{y}_v^{\text{exp}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

La résolution de ce système à chaque fréquence propre, nous permet d'obtenir le résidu en déplacement  $\mathbf{r}_v = \mathbf{u}_v - \mathbf{v}_v$  et le vecteur  $\mathbf{u}_v$  qui peut être interprété comme l'extension de  $\mathbf{c} \mathbf{y}_v^{\text{exp}}$  aux N ddls du MEF. Donc  $\mathbf{u}_v = \mathbf{y}_v^{\text{exp}}$ . La résolution de ce système  $2N \times 2N$  étant très coûteuse pour des MEFs avec un grand nombre de ddls, il est aussi possible de travailler avec des bases de réduction [47]. Dans le cas où seule la raideur est considérée, on notera l'analogie avec la méthode MDRE présentée paragraphe 1.5.2.

## Localisation

Les résidus  $\mathbf{r}_v$  et déplacements  $\mathbf{u}_v$  identifiés sont ensuite utilisés pour localiser les éléments erronés. À partir des équations (60) et (65), nous déduisons le critère énergétique élémentaire ou ERDC locale

$$\begin{aligned} e_v^{(el)} = & \frac{\gamma}{2} \mathbf{r}_v^T \mathbf{L}^{(el)} \mathbf{K}^{(el)} (\mathbf{L}^{(el)})^T \mathbf{r}_v + \frac{\gamma^2}{2(1-\gamma)} \mathbf{r}_v^T \mathbf{L}^{(el)} \omega_v^2 \mathbf{M}^{(el)} (\mathbf{L}^{(el)})^T \mathbf{r}_v \\ & + \frac{r}{1-r} (\mathbf{L} \mathbf{u}_v - \mathbf{c} \mathbf{y}_v^{\text{exp}})^T \mathbf{G}^r (\mathbf{L} \mathbf{u}_v - \mathbf{c} \mathbf{y}_v^{\text{exp}}). \end{aligned} \quad (67)$$

$\mathbf{K}^{(el)}$  et  $\mathbf{M}^{(el)}$  sont les matrices de raideur et de masse associées à un élément  $(el)$  et  $\mathbf{L}^{(el)}$  la matrice de localisation des ddls de cet élément. Ce critère est valable pour l'élément et le mode considérés. Des sous-domaines sont généralement définis de sorte à regrouper les éléments possédant des paramètres identiques. Pour un sous-domaine d'indice  $(ss)$ , le critère à considérer sera alors  $e_v^{(ss)} = \sum_{el \in ss} e_v^{(el)}$ . Si l'on souhaite évaluer la contribution sur tous les modes, on utilisera le critère  $e^{(ss)} = \sum_v e_v^{(ss)}$ . Il reste ensuite à pondérer ce critère. Parmi les diverses approches [143], on citera :



- la pondération par rapport à l'énergie des vecteurs étendus  $\mathbf{u}_v$  dans le sous-domaine

$$e_p^{(ss)} = \frac{e^{(ss)}}{\sum_{v=1}^m \sum_{el \in ss} \mathbf{u}_v^T \mathbf{L}^{(el)} \mathbf{K}^{(el)} (\mathbf{L}^{(el)})^T \mathbf{u}_v + \mathbf{u}_v^T \mathbf{L}^{(el)} \omega_v^2 \mathbf{M}^{(el)} (\mathbf{L}^{(el)})^T \mathbf{u}_v} ; \quad (68)$$

- la pondération par rapport à l'énergie dans toute la structure

$$e_p^{(ss)} = \frac{e^{(ss)}}{\sum_{v=1}^m \sum_{el \in ss} \mathbf{u}_v^T \mathbf{K} \mathbf{u}_v + \mathbf{u}_v^T \omega_v^2 \mathbf{M} \mathbf{u}_v} ; \quad (69)$$

- la pondération par rapport au volume du sous-domaine

$$e_p^{(ss)} = \frac{e^{(ss)}}{\sum_{el \in ss} V^{(el)}}. \quad (70)$$

Cette dernière pondération est à éviter dans le cas où le MEF contient des éléments sans volume comme par exemple les éléments ressorts ou masses.

Les sous-domaines possédant une valeur de  $e_p^{(ss)}$  très élevée par rapport aux autres sont susceptibles de présenter un défaut de modélisation en raideur et en masse. Nous n'avons par contre pas d'information sur le ou les paramètres de modèle concernés.

### Correction

Une procédure de recalage basée sur l'ERDC peut être la suivante :

1. localiser les erreurs de modélisation en utilisant les ERDC locales  $e_p^{(ss)}$  et sélectionner un ensemble de paramètres  $\mathbf{p}$  associés aux zones identifiées comme erronées ;
2. minimiser sous contraintes

$$\min_{\mathbf{p}_{\min} \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{p}_{\max}} F(\mathbf{p}) = \sum_{v=1}^m e_v^{\text{ERDC}_m} ; \quad (71)$$

3. si pour  $\mathbf{p}$  obtenu après minisation, l'ERDC globale  $F(\mathbf{p})$  est inférieure à un certain seuil, terminer. Sinon, revenir à l'étape 1).

Un algorithme itératif de type BFGS peut être utilisé pour la minimisation (71). À chaque itération, le système (66) est résolu d'où l'importance d'utiliser des bases de réduction dans le cas de grands MEFs.

Dans le cas général, le processus comporte donc une étape de localisation des erreurs de modélisation et une étape de correction des paramètres. Dans la section 4.2, les paramètres à recalculer sont imposés et donc seule la minimisation de l'ERDC globale est effectuée.



# Méthodologies d'aide à la décision en conception robuste

## Résumé

La maîtrise du calcul prévisionnel du comportement dynamique de structures mécaniques demeure un enjeu majeur pour l'amélioration de la conception en présence de facteurs mal maîtrisés. Dans ce document, nous présentons des méthodologies de conception permettant de prendre en compte dans le processus de décision, les incertitudes sur les paramètres de conception, les incertitudes sur les mesures ou encore l'impact des modifications.

Dans la première partie, nous étudions le potentiel d'une méthode de synthèse modale basée sur l'utilisation des modes propres orthogonaux. Une méthodologie de vérification et d'optimisation de super-éléments est également présentée. Enfin, nous montrons qu'un algorithme génétique peut permettre une sélection optimale des coordonnées physiques dans les méthodes de

réduction.

La deuxième partie concerne l'identification paramétrique des structures mécaniques à partir d'observations incertaines et la quantification de l'information susceptible d'être obtenue grâce à des mesures expérimentales. Nous utilisons dans cette étude une formulation probabiliste des problèmes inverses. Une planification d'essais en vue d'un gain d'information est réalisé avec des plans d'expérience bayésiens.

Dans la dernière partie, l'approche non-probabiliste *info-gap* est appliquée afin d'évaluer la robustesse aux incertitudes de deux méthodes de recalage. Cette méthode permet aussi de vérifier que, dans un environnement incertain et pour un critère de performance donné, il peut être préférable de choisir un modèle « satisfaisant » plutôt qu'un modèle optimal.

## Mots clés

Aide à la décision, sous-structuration, robustesse, problème inverse, information, planification d'essais, *info-gap*

---

## Decision aiding methodologies in robust design

### Abstract

Improving the quality of numerical simulations in structural elastodynamics remains a major challenge in order to improve design under uncertainty in the structure and its environment. In this document, we present design methodologies uncertainties to be taken into account in the decision-making process, including uncertainties in the design parameters, in the measurements, or even the impact of modifications.

In the first part, we examine the potential of a component mode synthesis method based on the use of the proper orthogonal modes. A methodology for the verification and improvement of superelements is also proposed. Finally, it is shown that a genetic algorithm can be used for an optimal selection of the physical coordinates in sub-

structuring methods.

The second part is devoted to the parametric identification of mechanical structures given uncertain observations and the information content of experimental measurements. A probabilistic formulation of the inverse problem is used here. A strategy of test planning for information gain is made based on Bayesian experimental design.

In the last part, the *info-gap* approach is applied to evaluate the robustness to uncertainties of two updating methods. This method also allows to verify that, in an uncertain environment and for a given performance criterion, it can be preferable to choose a robust-satisficing design rather than an optimal design.

### Keywords

Decision aiding, substructuring, robustness, inverse problem, information, test planning, *info-gap*